ЖОЗЕФЪ БЕРТРАНЪ,
членъ Института, профессоръ Политехнической школы и Французской Коллегіи

ИСТОРИЧЕСКІЙ ОЧЕРКЪ ОТКРЫТІЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО и ИНТЕГРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЙ

(«Предисловіе» къ «Дифференціальному Исчисленію» Бертрана, заключающее въ себѣ изложеніе знаменитаго спора между Лейбницемъ и Ньютономъ о первенствѣ открытія)

Переводъ безъ измѣненій съ послѣдняго французскаго изданія

М. В. ПИРОЖКОВА,
бывшаго преподавателя С.-Петербургской 10-ой гимназіи

Цѣна 50 коп.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
Издательство и книжный складъ «Наука и Жизнь»
В. Д. Дорнбергъ
(Спб., Пет. стор., Большой пр., д. 32)
1912

Домашняя библиотека
Пыркова В. Е.

4338

Предисловіе

Открытіе Исчисленія безконечно-малыхъ явилось небывалымъ успѣхомъ для математическихъ наукъ и послужило для разнообразнѣйшихъ и неожиданнѣйшихъ приложеній. Современники Лейбница и Ньютона по ихъ примѣру почерпнули въ изученіи ихъ методовъ смѣлость приступить ко множеству вопросовъ, еще столь недавно ими же считавшихся неразрѣшимыми, и къ средству разрѣшать ихъ безъ труда. Уже при первыхъ успѣхахъ можно было предположить всѣ трудности въ наукѣ устраненными заранѣе и думать, что геометры, по завѣту Лейбница, отъ чистой математики перейдутъ исключительно къ изученію законовъ природы. Но эта иллюзія была непродолжительна; съ болѣе могущественными методами возникли и болѣе трудныя задачи, которыя, несмотря на плодотворность новыхъ принциповъ, требовали все большей и большей изобрѣтательности ума. Поле предстоящихъ открытій, созерцаемое съ большей высоты, явилось лишь болѣе обширнымъ, и, какъ всегда въ такихъ случаяхъ бываетъ, новыя области, какія можно было предвидѣть, раздвинулись до предѣловъ, намѣчаемыхъ только геніемъ тѣхъ, которые принимались за ихъ изслѣдованіе.

Задачи, которымъ Дифференціальное исчисленіе обязано своимъ происхожденіемъ, были, однако, далеко не новыми. Великія открытія почти никогда, какъ извѣстно, не появляются внезапно. Новая идея рождается часто отъ какой-нибудь старой, авторъ которой не замѣтилъ ея слѣдствій, весьма очевидныхъ, но лишь послѣ ихъ открытія. Принципы Дифференціальнаго исчисленія не представляютъ исключенія изъ этого закона: дѣйствительно, они настолько просты, что устанавливаются какъ бы сами собой, и что если ихъ считаютъ такими плодотворными и доказываютъ ихъ важное значеніе, то лишь съ цѣлью удив-

ляться генію тѣхъ, кто ихъ впервые возвѣстилъ. Многіе изъ древнихъ авторовъ пользовались, въ частныхъ случаяхъ, тѣмъ же методомъ, открытіе котораго должно было принести столько славы; они раздѣляютъ честь закладки зданія, они же способствовали выполненію этого великаго труда. Мы не станемъ здѣсь вдаваться въ исторію математическихъ знаній съ цѣлью подняться, какъ указываетъ самъ Лейбницъ (*), отъ него до Архимеда, устанавливая между ними преемственную связь. Замѣтимъ только, что геометры часто занимались разысканіемъ касательныхъ, а также maxima и minima, и что имъ была уже давно извѣстна связь между этими двумя вопросами, когда Лейбницъ опубликовалъ въ 1684 г., въ лейпцигскихъ *Acta Eruditorum*, Замѣтку въ шесть страницъ, озаглавленную: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (**). Вотъ поистинѣ скромное заглавіе; читая его, можно подумать, что главнымъ преимуществомъ новаго метода является упрощеніе, вытекающее изъ устраненія необходимости освобождаться отъ знаменателей и радикаловъ: въ самомъ дѣлѣ, хотя послѣднія строки статьи и обѣщаютъ слѣдствія болѣе высокаго порядка, Лейбницъ, казалось, не подозрѣвалъ, что онъ открылъ одну изъ тончайшихъ и плодотворнѣйшихъ теорій, до какихъ только могъ дойти человѣческій умъ.

Въ этой первой Замѣткѣ излагаются, въ видѣ общихъ правилъ, методы, которые, будучи приложены къ несложному случаю, мало чѣмъ отличались бы отъ того, что уже было извѣстно. Ферматъ въ *Теоріи maxima и minima* (Fermat, *Théorie des maxima et minima*), Барроу въ своихъ *Лекціяхъ по геометріи* (Barrow, *Lectiones geometricae*), наконецъ, Слюзъ въ *Философскихъ запискахъ* (Sluze, *Transactions philosophiques*) пользовались аналогичными принципами; еще не предчувствуя цѣлаго удивительнаго ряда слѣдствій изъ нихъ, проницательные умы уже поняли ихъ важность. Дѣйствительно, Паскаль въ письмѣ къ Слюзу въ 1658 г. говорилъ *о чудесахъ новаго анализа* и какъ бы пророчествовалъ о новыхъ

(*) *Quod calculum differentialem attinet, fateor multa ei esse communia cum iis quae et tibi et Fermatio aliisque, imo jam ipsi Archimedi erant explorata.* (Письмо Лейбница къ Валлису отъ 29 декабря 1698 г.).

Въ переводѣ на русскій языкъ эта выдержка изъ письма означаетъ: «*Что касается дифференціальнаго исчисленія, признаюсь, много въ немъ есть общаго съ тѣмъ, что было извѣстно и тебѣ, и Фермату, и другимъ, и даже самому Архимеду*».

(**) *Новый методъ для maxima и minima, а также для касательныхъ, обнимающій дробныя и ирраціональныя количества, и особый для нихъ родъ исчисленія.*

теоріяхъ въ слѣдующихъ словахъ: „Есть общія свойства для всѣхъ этихъ вещей, знаніе которыхъ открываетъ уму еще бо̀льшія чудеса природы: главное изъ нихъ состоитъ въ постиженіи двухъ безконечностей, встрѣчающихся во всемъ, одной—безконечно-большой, другой—безконечно-малой“.

Вполнѣ поэтому естественно, что опубликованіе Лейбница не произвело непосредственнаго глубокаго впечатлѣнія, и не надо удивляться, что его современникъ Гюйгенсъ (Huyghens), одинъ изъ величайшихъ умовъ всѣхъ временъ, писалъ ему въ 1690 г., т.-е. шесть лѣтъ спустя послѣ опубликованія Замѣтки въ *Acta*: „Я имѣлъ время отъ времени кое-что изъ вашего новаго алгебраическаго исчисленія въ лейпцигскихъ *Acta*, но, находя его неяснымъ, я недостаточно въ него вникалъ для полнаго пониманія, а равно я думаю и самъ имѣть нѣкоторый равносильный методъ какъ для нахожденія касательныхъ къ кривымъ линіямъ, гдѣ обычныя правила или безполезны, или примѣняются съ большимъ трудомъ, такъ и для многихъ другихъ изслѣдованій“.

Два мѣсяца спустя онъ писалъ снова: „Я старался со времени моего послѣдняго письма понять ваше *Дифференціальное исчисленіе*, и настолько успѣлъ, что сталъ разбираться, но всего лишь два дня тому назадъ, въ приведенныхъ вами примѣрахъ..., и даже распозналъ основаніе этого исчисленія и всего вашего метода, который я считаю очень хорошимъ и очень полезнымъ. Однако я думаю имѣть нѣчто равносильное, какъ я вамъ писалъ въ послѣдній разъ“.

И только три года спустя, 17 сентября 1693 г., онъ ему пишетъ наконецъ: „Узнайте, милостивый государь, что я сдѣлалъ нѣкоторые успѣхи въ вашемъ превосходномъ дифференціальномъ исчисленіи, полезностью котораго я все болѣе и болѣе наслаждаюсь“.

Три года спустя послѣ перваго опубликованія Лейбница и когда большинство геометровъ, недостаточно освоившихся съ новымъ ученіемъ, все еще были не въ состояніи оцѣнить его важность и постичь его глубину, Ньютонъ опубликовалъ безсмертный трудъ, который для нашихъ даже дней содержитъ въ себѣ превосходныя приложенія. Онъ въ немъ постоянно употребляетъ методъ флюксій, покоящійся, подъ другимъ видомъ, на той же идеѣ, какъ и методъ дифференціаловъ.

Ньютонъ въ своей теоріи уподобляетъ перемѣнныя величины точкамъ въ движеніи, скорость которыхъ, или флюксія, служитъ ему для изученія закона одновременныхъ разсматриваемыхъ имъ измѣненій.

Какъ мы должны были привести имя Фермата, чтобы отмѣтить идею до Лейбница, аналогичную идеѣ дифференціаловъ, точно такъ же справедливо указать здѣсь на аналогію ученія о флюксіяхъ съ идеями, развитыми Робервалемъ (Roberval) въ его *Теоріи сложныхъ движеній* (*Théorie des mouvements composés*). Хотя Роберваль и ошибался въ изложеніи принциповъ, приложенія, имъ сдѣланныя, точны и многочисленны. Онѣ предупредили, по крайней мѣрѣ, на тридцать лѣтъ великое открытіе, которое должно было ихъ похоронить. Ньютонъ не упоминаетъ о Робервалѣ, работы котораго онъ, безъ сомнѣнія, не зналъ, но онъ точно признаетъ тождество своего ученія съ ученіемъ о дифференціалахъ и, не отмѣчая предшествующаго опубликованія Лейбница, онъ не оспариваетъ независимости его открытія. Трудно признать это яснѣе, чѣмъ дѣлаетъ самъ Ньютонъ въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

„Въ письмахъ, которыми я обмѣнялся десять лѣтъ назадъ съ искуснымъ геометромъ Лейбницемъ, я ему сообщалъ, что владѣю методомъ для опредѣленія maxima и minima, для проведенія касательныхъ и для рѣшенія другихъ подобныхъ же вопросовъ, и что этотъ методъ удавался такъ же хорошо для ирраціональныхъ выраженій, какъ и для прочихъ, и когда я скрылъ отъ него этотъ методъ подъ анаграммою, выражавшею слѣдующую фразу: „дано уравненіе, содержащее флюенты, найти флюксіи, и обратно“, онъ мнѣ отвѣтилъ, что равнымъ образомъ нашелъ аналогичный методъ, который мнѣ и сообщилъ и который отличался отъ моего только словами и обозначеніемъ“.

Ничего нѣтъ рѣшительнѣе этихъ строкъ, написанныхъ Ньютономъ въ самый моментъ опубликованія имъ впервые своего ученія. Приводимые имъ факты никогда, притомъ, не оспаривались. До своего перваго опубликованія Лейбницъ обмѣнялся дружескими сообщеніями съ авторомъ книги: „*Принципы*“ и получилъ нѣкоторые изъ его результатовъ, при чемъ, однако, со стороны Ньютона не было желанія открывать Лейбницу приведшій къ нимъ методъ.

Впрочемъ, сохранилось два письма, на которыя намекаетъ цитированное мѣсто. Одно изъ нихъ относится ко времени за двѣнадцать лѣтъ до опубликованія Лейбница, но оба они были ему сообщены только въ 1676 г., т.-е. за восемь еще лѣтъ до статьи въ *Acta Eruditorum*. Эти письма почти исключительно посвящены изложенію открытій, относящихся къ рядамъ, и содержатъ изложеніе только задачи, рѣшенной по методу флюксій, при чемъ самый методъ былъ скрытъ подъ шиф-

ромъ, изъ котораго Лейбницъ, несмотря на свою проницательность, не могъ извлечь никакого свѣдѣнія.

Равнымъ образомъ мы имѣемъ отвѣтъ Лейбница, написанный десятью мѣсяцами позднѣе, 21 іюня 1677 г.; изъ него видно, что онъ уже владѣлъ теоріей дифференціаловъ. Далекій отъ желанія преувеличивать важность своихъ результатовъ, придавая имъ таинственный видъ, и чуждый боязни, чтобы его открытія не облегчали открытій соперника, онъ сообщаетъ ясно всѣ свои идеи и текстъ задачъ, для которыхъ онъ еще жаждетъ рѣшенія. Единственной его виною было опубликовать семь лѣтъ спустя рѣшеніе тѣхъ же самыхъ задачъ безъ заявленія, что Ньютонъ также умѣлъ ихъ рѣшать и первый извѣстилъ его объ этомъ.

Трудно, дѣйствительно, не сопоставить заглавія Замѣтки Лейбница со слѣдующимъ мѣстомъ изъ письма Ньютона:

„Къ тому же, онъ только не останавливается на уравненіяхъ, заключающихъ одно или два неопредѣленныхъ количества подъ радикалами, но и безъ всякаго преобразованія такихъ уравненій (что потребовало бы въ большинствѣ случаевъ огромной работы) касательная опредѣляется непосредственно. То же происходитъ въ maxima и minima“.

Это мѣсто дѣлаетъ права Ньютона неоспоримыми и склонило бы вѣсы въ его сторону, если бы непремѣнно требовалось высказаться за того или другого изъ двухъ соперниковъ. Съ другой стороны, установленъ принципъ, что въ вопросахъ пріоритета первенство опубликованія создаетъ безусловное право; и это мнѣніе, энергичнымъ выразителемъ котораго явился Паскаль, рѣшило бы вопросъ, наоборотъ, въ пользу Лейбница.

„Съ того момента, говоритъ онъ, какъ открытіе опубликовано, нельзя ни убѣдить другихъ въ томъ, что оно найдено безъ этой помощи, ни увѣриться въ этомъ самому, потому что такое свѣдѣніе измѣняетъ познанія и направленіе ума: они уже болѣе не тѣ, что были раньше; даже новые пути не служили бы доказательствомъ, такъ какъ извѣстно, что насколько легко уже открытое приводить къ другимъ методамъ, настолько же трудно открывать это въ первый разъ; такимъ образомъ вся честь заключается въ первомъ твореніи, всѣ остальныя подозрительны; чтобы только не подвергнуться такому подозрѣнію, лица, принимающія вещи въ надлежащемъ свѣтѣ, утаиваютъ свои собственныя открытія, разъ имъ стало извѣстно, что другой опередилъ ихъ уже съ ними, хотя бы и имѣлись нѣкоторыя доказательства тому,

что они этого не знали, предпочитая скорѣе лишиться этого небольшого преимущества, чѣмъ навлечь на себя столь непріятный упрекъ".

Но эти строки, такія ясныя и такія справедливыя, нельзя, однако, приложить ни къ Лейбницу, ни къ Ньютону. Паскаль не предвидѣлъ случая, когда авторъ открытія самъ сначала освѣдомилъ бы о немъ, скрывая секретъ своего метода, того, который долженъ опубликовать его первымъ. Письмо Ньютона, сообщенное Лейбницу, сохраняло, очевидно, всѣ его права, и самъ Паскаль не посовѣтовалъ бы ему *утаить свое открытіе*. Если можно предсказать по аналогіи мнѣніе Паскаля, то должно даже думать, что скорѣе Лейбницу былъ бы данъ подобный совѣтъ. Въ самомъ дѣлѣ, онъ съ большою жестокостью обрушился на Торричелли (Torricelli) за то, что тотъ первый опубликовалъ квадратуру циклоиды, найденную раньше Робервалемъ, но не опубликованную, и безъ положительнаго доказательства поспѣшно заговорилъ о плагіатѣ. Между этимъ и занимающимъ насъ вопросомъ большое сходство; его меньше изучали, потому что предметъ спора менѣе важенъ, но причины къ призыву тѣ же самыя, и мы не можемъ поступить лучше, какъ привести мнѣніе англичанина Валлиса (Wallis), который, защищая Торричелли противъ страстныхъ нападокъ Паскаля, этимъ самымъ оправдалъ заранѣе поведеніе Лейбница.

„Мы, конечно, обязаны болѣе Торричелли, который сдѣлалъ доступными открытія, пусть даже совершенныя, чѣмъ Робервалю, скрывшему свои; и мы спрашиваемъ, нужно ли было бы потому только, что Роберваль не хотѣлъ опубликовывать своихъ открытій, чтобы и Торричелли не опубликовывалъ своихъ?"

Паскаль по другому поводу самъ оправдываетъ такое поведеніе своимъ собственнымъ примѣромъ. Роберваль рѣшилъ трудную задачу относительно нѣкоторыхъ частей цилиндрическихъ поверхностей, но ничего не пожелалъ о ней опубликовывать, чтобы, говорилъ онъ, сохранить свое открытіе на случай необходимости. „Какъ только онъ узналъ, говоритъ Паскаль, что я ее рѣшилъ, онъ заявилъ, что не претендуетъ болѣе на это открытіе и ничего никогда не опубликуетъ о немъ по той причинѣ, что, ни разу не представивъ рѣшенія, онъ долженъ предоставить его тому, кто первый это сдѣлалъ. Я очень хотѣлъ бы, прибавляетъ Паскаль, чтобы всѣ такъ поступали". Но, какъ бы то ни было и къ какому бы мнѣнію мы ни пришли, нужно отдать справедливость Ньютону, что при этихъ первыхъ опубликованіяхъ онъ былъ безупреченъ. Упомянуть о правѣ Лейбница раздѣлить съ нимъ честь

открытія, было все, что онъ долженъ былъ сдѣлать, и онъ сдѣлалъ это безъ всякихъ разсужденій и оговорокъ. Можно замѣтить, что онъ не говоритъ о статьѣ въ лейпцигскихъ *Acta*, но, быть можетъ, онъ о ней и не зналъ.

Лейбницъ, съ своей стороны, принялъ съ самою чистосердечною искренностью точныя завѣренія своего противника относительно болѣе ранняго права на его открытіе; онъ даже, повидимому, очень мало заботился о сравненіи обѣихъ доктринъ: по крайней мѣрѣ, только въ 1694 г., т.-е. десять лѣтъ спустя послѣ Замѣтки въ *Acta Eruditorum* и семь лѣтъ спустя послѣ опубликованія книги: „*Принципы*", пишетъ онъ Гюйгенсу:

„Я не знаю, когда увижу трудъ, только-что опубликованный Валлисомъ. Не сдѣлаете ли мнѣ одолженія скопировать мѣста, въ которыхъ Ньютонъ даетъ новыя открытія. Я не прошу собственно его пріема нахожденія рядовъ, но если онъ даетъ способы для обратнаго предложенія о касательныхъ или что-нибудь въ этомъ родѣ, такъ какъ, сообщая мнѣ нѣкогда объ этомъ, онъ скрылъ свой методъ подъ анаграммою".

И нѣсколькими недѣлями позже:

„Прежде всего благодарю васъ за сообщеніе труда Валлиса, касающагося Ньютона. Я вижу, что его исчисленіе согласуется съ моимъ, но я думаю, что разсмотрѣніе разностей и суммъ болѣе свойственно уму. Мнѣ кажется, что Валлисъ говоритъ довольно холодно о Ньютонѣ и въ такомъ тонѣ, что эти методы было бы не трудно извлечь изъ лекцій Барроу (Barrow). Когда что-нибудь сдѣлано, легко говорить: *И мы это могли...*"

Въ томъ же мѣсяцѣ онъ писалъ въ *Журналѣ Ученыхъ*: „Нужно отдать справедливость Ньютону (которому многимъ обязаны астрономія, геометрія и оптика), что и въ этомъ, какъ стало потомъ извѣстно, онъ имѣлъ кое-что подобное свое".

Предыдущій разсказъ вскрываетъ правдоподобно всю истину. Въ немъ никоимъ образомъ нельзя было предвидѣть матеріала для долгаго процесса, который спустя болѣе столѣтія все еще обсуждался со страстностью. Въ самомъ дѣлѣ, вопросъ о пріоритетѣ былъ поднятъ слишкомъ поздно; столь скромный видъ, подъ которымъ Лейбницъ представилъ свое открытіе, безспорно показываетъ, какъ мало важности придавалъ онъ ему вначалѣ. Значеніе ихъ труда росло мало-по-малу какъ въ глазахъ самихъ авторовъ, такъ и въ глазахъ ихъ учениковъ, и когда

методъ безконечно-малыхъ измѣнилъ весь видъ науки, они ближе всмотрѣлись въ свои права, строго потребовали ихъ обратно, и вскорѣ прибѣгли къ открытой войнѣ. Но не принимая участія въ этой распрѣ, которая ведется еще по настоящее время, ограничимся пересказомъ нѣкоторыхъ фактовъ, слишкомъ извѣстныхъ, чтобы возможно было пройти ихъ молчаніемъ. Къ тому же, кропотливыя изслѣдованія, къ которымъ не разъ обращались, привели вопросъ къ его исходному пункту; потомство, равно почтительное къ памяти обоихъ знаменитыхъ изслѣдователей, признало за каждымъ изъ нихъ ту долю славы, которая выпала ему вначалѣ, по самому признанію его соперника, и геометры, оцѣнивая обѣ теоріи, какъ вполнѣ равносильныя, изучаютъ ту и другую въ ихъ источникѣ, извлекая пользу изъ различія въ точкахъ зрѣнія, облегчающаго ихъ пониманіе и освѣщающаго ихъ философію.

Вотъ что послужило поводомъ для знаменитаго спора, которому слишкомъ пылкіе друзья придали характеръ и важность настоящаго процесса.

Иванъ Бернулли (Jean Bernoulli), посвященный своимъ братомъ Яковомъ въ методы безконечно-малыхъ, предлагая геометрамъ знаменитую задачу о брахистохронѣ, объявилъ, по весьма распространенному обычаю того времени, что даетъ имъ шесть мѣсяцевъ для представленія рѣшеній, обязуясь свое въ теченіи этого времени держать въ секретѣ. Только Лейбницъ отвѣтилъ на призывъ Бернулли; но, сообщая ему свой методъ, онъ его просилъ, въ интересахъ науки, продолжить срокъ, чтобы дать возможность другимъ геометрамъ выказать свою проницательность; онъ прибавлялъ, что трудности задачи представляются ему такими, что онъ считаетъ возможнымъ указать заранѣе четыре или пять геометровъ, способныхъ въ то время ихъ преодолѣть, если бы они согласились за нее взяться. Fatio de Duillier, членъ Лондонскаго Королевскаго Общества, который, какъ свидѣтельствуютъ объ этомъ многія изъ его работъ, сдѣлалъ большіе успѣхи въ познаніи новыхъ методовъ, былъ, повидимому, глубоко уязвленъ тѣмъ, что Лейбницъ не посчиталъ его среди названныхъ имъ искусныхъ людей. Онъ горько жаловался на это въ сочиненіи, опубликованномъ въ 1699 г. подъ заглавіемъ *Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex* (*), одновременно тамъ же порицая привычку Лейбница всегда адресоваться къ публикѣ. Кромѣ того, онъ заявляетъ, что самъ, въ 1687 г., нашелъ, посредствомъ

(*) *Двойное геометрическое изслѣдованіе линіи кратчайшаго спуска.*

своихъ собственныхъ размышленій, принципы и главныя правила открытаго Ньютономъ исчисленія флюксій, котораго Лейбницъ не является даже, по его словамъ, вторымъ авторомъ, какъ знаютъ это тѣ, кому извѣстна корреспонденція Ньютона и нѣкоторыя рукописныя статьи, которыхъ онъ не обозначаетъ.

Хотя характеръ у Duillier былъ, повидимому, тщеславный и пустой, и хотя одно лишь раздраженное самолюбіе вдохновило его на изслѣдованіе, окружившее его имя прискорбной извѣстностью, все-же справедливость требуетъ признать его за человѣка съ истинными заслугами. Гюйгенсъ и Лейбницъ, имѣвшіе съ нимъ долгія отношенія, выказываютъ въ своей перепискѣ большое уваженіе къ его талантамъ (*); несправедливо поэтому выставили его однимъ изъ тѣхъ невѣждъ, полныхъ зависти, которые способны, самое большее, слѣдовать за другими, сами же дать ничего не могутъ; въ особенности, зашли слишкомъ далеко, изображая его, какъ низкую и злую душу, и стараясь опозорить его память (**).

Лейбницъ вмѣсто всякаго отвѣта противопоставилъ доказательства уваженія, которыя онъ получалъ, при всякомъ случаѣ, отъ Ньютона; онъ самъ охотно выражаетъ свое удивленіе автору книги: „*Принципы*“ и оспариваетъ у Фаціо право вводить его въ споръ, не имѣющій, повидимому, основанія.

Пререканія не пошли дальше, и противники положили оружіе, говоритъ Dr Brewster, готовые поднять его при первомъ удобномъ случаѣ.

Въ 1704 г. Ньютонъ, опубликовывая, въ слѣдъ за своей *Оптикой*, *Трактатъ о квадратурѣ кривыхъ*, объявилъ во Введеніи, не упоминая на этотъ разъ о Лейбницѣ, что методъ флюксій обрисовался въ его умѣ въ теченіи 1665 и 1666 гг. *Acta Eruditorum* дали въ январѣ 1705 г. отчетъ объ этомъ трудѣ, въ которомъ читаемъ слѣдующія строки.

„Талантливый авторъ прежде чѣмъ приступить къ квадратурамъ

(*) «Я хорошо понимаю, что эти квадратуры кривыхъ и обратная задача о касательныхъ во многихъ случаяхъ могутъ быть чрезвычайно полезны; но видя ошибки, какіе сдѣлали Лейбницъ, Фаціо и Ньютонъ въ разрѣшеніи этихъ задачъ, прежде чѣмъ я помыслилъ о нихъ, я предпочелъ лучше воспользоваться ихъ работою, чѣмъ приниматься самому за разысканія послѣ нихъ, тотчасъ послѣ того, какъ Фаціо подалъ мнѣ надежду на публикованіе по этому предмету трактата Ньютона, который, по его мнѣнію, знаетъ въ немъ больше его и Лейбница вмѣстѣ».

(*Письмо Гюйгенса къ Лопиталю* (*l'Hospital*), 22 октября 1692 г.)

(**) Не исправляя здѣсь его біографіи упомянемъ лишь, что Fatio de Duillier неоднократно впадалъ въ крайности, какъ выражаемыя религіозныя мнѣнія; онъ вообразилъ въ себѣ даръ чудесъ и обѣщалъ воскресить публично мертваго. Ему это не удалось, и враги добились для него приговора къ позорному наказанію.

кривыхъ или лучше криволинейныхъ фигуръ, помѣщаетъ краткое введеніе, для уясненія котораго необходимо знать, что когда какая-нибудь величина, напр линія, растетъ непрерывно флюксіею точки, описывающей ее, то называютъ разностями эти мгновенныя приращенія, т.-е. разности между величинами до и послѣ каждаго изъ этихъ измѣненій; изъ этого-то родилось дифференціальное исчисленіе и обратное ему исчисленіе суммъ (le calcul sommatoire), основы которыхъ были опубликованы въ нашемъ сборникѣ Лейбницемъ, открывшимъ ихъ, а различныя ихъ приложенія были показаны братьями Бернулли и маркизомъ Лопиталемъ (l'Hospital). Это и есть тѣ дифференціалы Лейбница, которые Ньютонъ замѣняетъ и всегда замѣнялъ флюксіями, представляющими съ большимъ приближеніемъ приращенія флюентовъ, производимыхъ въ равныя частицы времени, флюксіями, изъ которыхъ онъ сдѣлалъ изящное употребленіе какъ въ своемъ трудѣ о математическихъ принципахъ природы, такъ и въ другихъ своихъ сочиненіяхъ подобно тому какъ Фабръ (H. Fabre), въ своей *Synopsis mathematica*, замѣнилъ разсмотрѣніемъ движеній методъ Каваллери (Cavalieri)".

Эти строки, опубликованныя безъ подписи, по всей вѣроятности написаны Лейбницемъ. Нужно сознаться, что въ нихъ онъ, повидимому, приписываетъ себѣ открытіе дифференціаловъ, а Ньютона выставляетъ какъ бы заимствовавшимъ и преобразовавшимъ ихъ; но также нельзя не признать, что если такова его мысль, то онъ предоставляетъ ее угадывать.

Дръ Кейль (Dr Keil), другъ Ньютона, увидѣлъ, однако, въ этомъ вѣроломно скрытое обвиненіе и, чтобы отозваться на него, написалъ въ письмѣ о законахъ центростремительной силы, адресованномъ Галлею (Halley) и опубликованномъ въ Лондонскихъ *Философскихъ запискахъ* за 1708 г.:

„Все это есть слѣдствіе знаменитой ариѳметики флюксій, открытія которой нельзя оспаривать у Ньютона, какъ легко въ этомъ убѣдиться читая тѣ изъ его писемъ, которыя были опубликованы Валлисомъ Этотъ методъ былъ, однако, подъ другимъ именемъ и съ другими обозначеніями, опубликованъ Лейбницемъ въ *Acta Eruditorum*".

Лейбницъ обратился тогда къ Королевскому Обществу, членомъ котораго состоялъ, оспаривая у человѣка новаго, какъ Кейль, право высказываться столь смѣло о вещахъ, въ которыхъ онъ не могъ быть свѣдущъ, и требуя, чтобы онъ положилъ конецъ этимъ пустымъ и несправедливымъ воззваніямъ, порицаемымъ, безъ сомнѣнія, прибавляетъ онъ, самимъ Ньютономъ. Но въ этомъ онъ ошибался; дѣйстви-

тельно, хотя Ньютонъ избѣгалъ выступать лично въ спорѣ, но теперь уже доказано, что Кейль дѣйствовалъ съ его согласія и ничего не писалъ безъ его совѣта. Какъ бы то ни было, Общество, поставленное въ необходимость высказаться, назначило коммиссаровъ, которые раньше, чѣмъ черезъ годъ, опубликовали весьма краткій докладъ, приложенный къ книгѣ, нѣсколько разъ потомъ переизданной, подъ заглавіемъ: *Commercium Epistolicum* (*) *J. Collins et aliorum de varia re mathematica inter celeberrimos praesentis seculi mathematicos, una cum recensione praemissa insignis controversiae inter Leibnitium et Keilium de primo inventore Methodi Fluxionum; et judicio primarii, ut ferebatur, mathematici subjuncto, iterum impressum* (**).

Этотъ драгоцѣнный сборникъ для исторіи науки содержитъ большое число математическихъ сообщеній, которыми обмѣнялись англійскіе геометры какъ между собою, такъ и съ Лейбницемъ; но большинство этихъ статей чуждо спора и въ состояніи скорѣе затемнить, чѣмъ освѣтить вопросъ.

Напомнивъ исторію открытія, провозглашеннаго Лейбницемъ, который подалъ поводъ къ поднятію вопроса о пріоритетѣ, признанному уважительнымъ, коммиссары рѣшаютъ о правахъ на открытіе дифференціальнаго исчисленія съ авторитетомъ, не приличествующимъ ни людямъ лично столь неизвѣстнымъ, ни друзьямъ его соперника, работающимъ, не признавая его, на глазахъ Ньютона, который помогалъ имъ, какъ потомъ было доказано, своимъ дѣятельнымъ сотрудничествомъ. Ихъ произведенія, обнаруживающаго больше страстности, чѣмъ рвенія къ истинѣ, одного было бы достаточно, чтобы предостеречь противъ вписанныхъ туда утвержденій, обидныхъ для Лейбница. Въ трудѣ, который долженъ былъ носить характеръ самой нелицепріятной точности, они выступили въ роли не судей, а обвинителей и адвокатовъ, не боясь выдавать свои предубѣжденія или свои догадки за несомнѣнныя истины, такимъ образомъ, было бы неосторожно выказать имъ безусловное довѣріе, и матеріалы, которые они намъ передали, должны быть подвергнуты строгой критикѣ.

Полезно, однако, воспроизвести текстъ ихъ доклада, потому что онъ ясно устанавливаетъ какъ сущность вопроса, такъ и узелъ спора.

(*) Это заглавіе 2-го изданія было пересмотрено Ньютономъ, который перепробовалъ, какъ доказываетъ изслѣдованіе его бумагъ, до двѣнадцати различныхъ редакцій.

(**) *Собраніе писемъ И. Коллинза и другихъ о различныхъ математическихъ вещахъ между знаменитѣйшими математиками настоящаго вѣка, съ предпосланнымъ разсужденіемъ о замѣчательномъ спорѣ между Лейбницемъ и Кейлемъ о первомъ изобрѣтателѣ Метода Флюксій, дополненное приговоромъ надъ первѣйшимъ, какъ гласитъ, а можетъ математикомъ*

„Мы прочли письма и копіи съ писемъ хранящіяся какъ въ архивахъ Королевскаго Общества, такъ и въ коллекціи Ивана Коллинза, съ датами относящимися къ годамъ 1669 — 1677. Мы удостовѣрились въ подлинности тѣхъ, которыя носятъ имена Барроу, Коллинза, Ольденбурга и Лейбница, изъ показаній лицъ, знакомыхъ съ ихъ почеркомъ. Относительно писемъ, носившихъ имя Грегори (Gregory), мы положились на самого Коллинза, копировавшаго собственноручно часть этихъ писемъ. Мы извлекли изъ этихъ писемъ все что относилось къ занимающему насъ предмету и констатировали, что эти извлеченія, предъявляемыя вамъ одновременно съ этими письмами, были сдѣланы тщательно.

„Изъ этихъ писемъ и документовъ слѣдуетъ:

„I. Лейбницъ въ началѣ 1673 г. былъ въ Лондонѣ; около марта мѣсяца онъ выѣхалъ въ Парижъ, откуда по просьбѣ Ольденбурга, поддерживалъ съ Коллинзомъ переписку, продолжавшуюся до 1676 г. Затѣмъ онъ возвратился черезъ Лондонъ и Амстердамъ въ Гановеръ. Извѣстно же, что Коллинзъ всегда сообщалъ весьма охотно математикамъ то, что узнавалъ отъ Ньютона и отъ Грегори.

II. Лейбницъ объявилъ себя, послѣ своего перваго Лондонскаго путешествія, изобрѣтателемъ нѣкоего метода, а именно дифференціальнаго, и хотя Пелль (Pell) увѣдомилъ его, что Ньютонъ уже пользовался этимъ методомъ, онъ тѣмъ не менѣе продолжалъ приписывать себѣ всѣ права изобрѣтателя, какъ по тому, что онъ его нашелъ по его словамъ, безъ всякой посторонней помощи, не зная объ опубликованіяхъ Ньютона, такъ и по тому, что онъ къ нему много прибавилъ. Мы же не находимъ никакого упоминанія о дифференціальномъ методѣ иномъ, чѣмъ методъ Ньютона, до письма Лейбница отъ 11 іюня 16 г. спустя цѣлый годъ, какъ отправлено было письмо Ньютона отъ 0 декабря 167 г. въ Парижъ для передачи Лейбницу и четыре года спустя, какъ Коллинзъ сталъ сообщать это самое письмо своимъ друзьямъ. Въ этомъ письмѣ методъ флюксій достаточно описанъ для всякаго, находящагося въ курсѣ этихъ вещей.

III. Изъ письма Ньютона отъ 13 іюня 16 6 г. вытекаетъ съ очевидностью, что уже за пять лѣтъ до этой даты онъ зналъ методъ флюксій. Равнымъ образомъ вытекаетъ изъ его анализа посредствомъ уравненій съ безконечнымъ числомъ членовъ, сообщенного Барроу и Коллинзу въ 16 9 г., что онъ еще и до этого времени думалъ о томъ же методѣ.

„IV. Дифференціальный методъ совершенно тотъ же, что и методъ флюксій, за исключеніемъ названія и обозначенія... Мы полагаемъ, что приписавшіе изобрѣтеніе Лейбницу не знали или знали плохо объ отношеніяхъ, существовавшихъ между имъ и Коллинзомъ, и не знали, что Ньютонъ пользовался тѣмъ же методомъ за пятнадцать лѣтъ до того, какъ Лейбницъ приступилъ къ его опубликованію въ *Acta Eruditorum*.

„Послѣ всего этого мы думаемъ, что Ньютонъ есть первый изобрѣтатель этого метода и что, слѣдовательно, Кейль, приписывая его Ньютону, никоимъ образомъ не поступилъ неправильно или несправедливо по отношенію къ Лейбницу".

По этому приговору притязанія Лейбница не могли имѣть никакого основанія. Онъ тщетно жаловался: „Но я не знаю, писалъ онъ Шамберлену (Chamberlayne), какимъ крючкотворствомъ и какимъ обманомъ поставили кто-то дѣло такъ, будто я жалуюсь передъ Обществомъ и подчиняюсь его юрисдикціи, о чемъ я никогда не помышлялъ; и по справедливости должно было бы меня увѣдомить, что Общество желаетъ разобрать сущность дѣла, и должно было бы предоставить мнѣ высказаться, желаю ли я изложить свои доводы и не имѣю ли я подозрѣнія противъ кого-либо изъ Судей. Итакъ, судили *по выслушаніи* только *одной стороны* (*una parte audita*); недѣйствительность такого образа дѣйствій очевидна. Также не думаю я, чтобы вынесенный ими Приговоръ могъ быть принятъ за постановленіе Общества.

„Однако по иниціативѣ Ньютона была издана Книга исключительно съ цѣлью меня обезславить и была разослана въ Германію, Францію и Италію, какъ бы отъ имени Общества. Этотъ самозванный приговоръ и это безпричинное поношеніе одного изъ старѣйшихъ членовъ самого Общества, который ничѣмъ его не запятналъ, почти не найдетъ защитниковъ въ свѣтѣ; и въ самомъ Обществѣ, я надѣюсь, не всѣ члены согласятся съ нимъ. Знающіе французы, итальянцы и другіе открыто порицаютъ этотъ процессъ и удивляются ему: на это имѣются письма въ рукахъ; выставленныя противъ меня доказательства кажутся имъ весьма слабыми.

„Я всегда поступалъ наичестнѣйшимъ образомъ по отношенію къ Ньютону; и хотя теперь открывается большое поле для сомнѣній, владѣлъ ли онъ моимъ открытіемъ до полученія его отъ меня, я говорилъ, что онъ имѣетъ какъ бы нѣчто собственное, подобное моему методу. Но введенный въ заблужденіе нѣкоторыми неосторожными

льстецами, онъ рѣшился повести противъ меня весьма чувствительную аттаку. Судите теперь, Милостивый Государь, съ чьей главнымъ образомъ стороны должны быть приняты необходимыя мѣры для прекращенія этой распри".

Однако, какъ только Коммиссія высказалась, англійскіе геометры приняли ея заключенія и посмотрѣли на нихъ, какъ на солидно обоснованныя. Такъ поступаетъ Тэйлоръ въ трудѣ, озаглавленномъ *Methodus Incrementorum*, гдѣ имя Лейбница даже не упоминается; то же подтверждаетъ Маклоренъ въ *Treatise of Fluxions*, опубликованномъ въ 1725 г.; наконецъ, Бюффонъ съ еще большею силою повторяетъ то же самое въ предисловіи къ переводу труда Ньютона. Лейбницъ, если принять его разсказъ, прибавилъ къ неизвинительной недобросовѣстности почти смѣшную безтактность.

„Лейбницъ, говоритъ онъ, находился въ обладаніи, и въ обладаніи неоспоримомъ, всего того, что произвела геометрія наиболѣе блестящаго за двадцать вѣковъ; но этотъ блескъ славы не былъ продолжителенъ; слишкомъ ревностные приверженцы и ослѣпленные ученики желая возвысить своего учителя, были причиною пониженія его репутаціи".

Большая часть геометровъ континента осталась, однако, при противоположномъ мнѣніи; очень многіе изъ нихъ и, притомъ, наиболѣе знаменитые признали права Лейбница, обвиняя англичанъ въ несправедливости и легкомысліи.

Разсмотримъ, въ самомъ дѣлѣ, постановленіе коммиссаровъ; его можно свести къ двумъ положеніямъ:

1. Исчисленіе флюксій не отличается отъ дифференціальнаго исчисленія.

2. Это единственное въ своемъ родѣ ученіе, созданное Ньютономъ, было ясно сообщено Лейбницу, прежде чѣмъ онъ опубликовалъ его, какъ свое.

Первое изъ этихъ утвержденій неоспоримо: формальное заявленіе каждаго изъ обоихъ соперниковъ избавляетъ насъ отъ необходимости настаивать на этомъ пунктѣ, на которомъ сходятся обѣ стороны.

Что касается обвиненія въ плагіатѣ, взводимаго на Лейбница, потомство его не утвердило. Оно покоится, какъ мы видѣли, на сообщеніи Лейбницу Ольденбургомъ письма, написаннаго Ньютономъ отъ 10 декабря 1672 г., въ которомъ, говорятъ коммиссары, методъ флюксій достаточно описанъ для всякаго понимающаго человѣка. Но этотъ существенный пунктъ обвиненія исчезаетъ совершенно, потому что

при очень недавнемъ осмотрѣ бумагъ Лейбница, сохраненныхъ въ Гановерѣ, обнаружилось, что это письмо не было послано цѣликомъ и что въ извлеченіи, полученномъ Лейбницемъ въ 1676 г., только слѣдующее мѣсто относится къ методу флюксій.

„Послѣ смерти Грегори Коллинзъ собралъ обширную корреспонденцію, которую они вели и въ которой находится исторія метода рядовъ. Ньютонъ обѣщалъ ему тогда присоединить къ ней свой собственный методъ для опубликованія при первомъ же случаѣ. Не будетъ лишнимъ прибавить, что Ньютонъ, сообщая намъ, отъ 10 декабря 1672 г., свой методъ касательныхъ къ геометрическимъ кривымъ, опредѣляемымъ посредствомъ уравненія между ординатою и абсциссою, прибавлялъ, что это частный случай или лучше слѣдствіе изъ общаго метода, который распространяется, безъ сложныхъ вычисленій, не только на опредѣленіе касательныхъ ко всѣмъ кривымъ геометрическимъ, механическимъ или зависящимъ по какому бы то ни было закону отъ прямыхъ или кривыхъ линій, но также и на рѣшеніе болѣе трудныхъ задачъ, относящихся къ площадямъ, къ длинамъ, къ кривизнѣ линій, къ центрамъ тяжести, и проч.; и, прибавляетъ онъ, этотъ методъ не ограничивается, подобно методу Гедда (Hudde) для maxima и minima и методу Слюза (Sluze) для касательныхъ, уравненіями, освобожденными отъ ирраціональныхъ членовъ. Ньютонъ соединилъ, говоритъ онъ, этотъ методъ съ методомъ, который покоится на развертываніи уравненій въ безконечные ряды, и онъ помнитъ, что когда Дръ Барроу опубликовалъ свой трудъ, онъ его увѣдомилъ, что владѣетъ такимъ методомъ“.

Нѣтъ здѣсь, какъ видно, ни изложеннаго, ни намѣченнаго метода, это письмо, столь рѣшающее по мнѣнію коммиссаровъ, ставитъ только вопросъ, для котораго Лейбницъ, судя по его отвѣту, напечатанному въ *Commercium Epistolicum*, зналъ уже рѣшеніе.

Это открытіе вдвойнѣ драгоцѣнно: оно не только сводитъ на нѣтъ наиболѣе тяжкое обвиненіе коммиссаровъ, но и подтверждаетъ въ нѣкоторомъ родѣ точность увѣреній Лейбница, когда онъ заявляетъ, что это въ Вѣнѣ онъ узналъ объ опубликованіи *Commercium*'а и что, отвѣчая на него, онъ зналъ его только по донесеніямъ своихъ друзей, не видѣвъ еще самого экземпляра. Такое заявленіе признали весьма неправдоподобнымъ, однако оно объясняетъ то, что безъ этого было бы очень трудно понять: какъ Лейбницъ, которому стоило произнести лишь одно слово, чтобы доказать относительно этого важнаго пункта

все легкомысліе своихъ противниковъ, могъ воздержаться отъ всякаго возраженія.

Итакъ, не существуетъ никакого доказательства противъ полнѣйшей искренности великихъ геніевъ, вступившихъ въ споръ, и должно имъ обоимъ приписать честь открытія, на которое они оба заявляютъ свои права.

Однако каждый изъ двухъ соперниковъ взялъ обратно уступки, которыя онъ имѣлъ прямодушіе сдѣлать, и ихъ поведеніе по поводу *Commercium Epistolicum* не оставляетъ выбора для тѣхъ, кто желалъ бы видѣть много легкомыслія въ прошломъ, или отсутствіе недобросовѣстности въ настоящемъ. Оно было бы непостижимо, если бы мы не знали, какъ сказалъ Паскаль, что *великіе люди, какъ бы они ни были возвышенны, съ нѣкоторой стороны такъ походятъ на малыхъ.*

Лейбницъ, столько разъ приписывавшій Ньютону честь независимаго и болѣе ранняго, чѣмъ его, открытія, на самомъ дѣлѣ не имѣлъ достаточно внутренней правды и моральной возвышенности, чтобы остаться справедливымъ по отношенію къ тому, кто, спрятавшись подъ прозрачнымъ вуалемъ, старался его обезславить.

Но за нимъ еще болѣе тяжкая вина: добившись отъ Ивана Бернулли сужденія о правахъ Ньютона подъ условіемъ держать его въ секретѣ, онъ опубликовалъ его безъ согласія автора, вставивъ туда фразу, равносильную подписи. Такой поступокъ непростителенъ.

Ньютонъ съ своей стороны старался истолковать въ другую сторону сдѣланное имъ заявленіе, столь, однако, опредѣленное, о правахъ Лейбница. Въ самомъ дѣлѣ, въ 1716 г. онъ пишетъ:

„Онъ утверждаетъ, будто я въ моей книгѣ: „*Принципы*“, на стран. 253 и 254, согласился съ тѣмъ, что онъ владѣетъ независимо отъ меня открытіемъ Дифференціальнаго исчисленія; приписывать же открытіе въ настоящее время самому себѣ значитъ брать назадъ сдѣланную ему уступку. Но въ цитируемомъ имъ параграфѣ я не нахожу ни одного благопріятнаго для него слова. Напротивъ, я тамъ говорю, что увѣдомилъ о своемъ методѣ Лейбница раньше, чѣмъ онъ меня о своемъ; и я ставлю въ обязанность доказать, что онъ нашелъ методъ раньше даты моего письма, т.-е. за восемь мѣсяцевъ, по крайней мѣрѣ, до даты своего письма. Кромѣ того, отсылая тамъ читателей къ письмамъ, которыми мы, Лейбницъ и я, обмѣнялись за десять лѣтъ передъ этимъ, я имъ предоставилъ руководиться этими письмами, могущими служить для разъясненія разсматриваемаго параграфа.

Онъ, наконецъ, имѣлъ безтактность опустить разсматриваемую Замѣтку въ изданіи 1726 г., безъ иного результата, какъ еще сильнѣе подчеркнуть рѣшающую важность свидѣтельства, которое, будучи помѣщено въ книгѣ: „*Принципы*“, застраховано отъ погибели.

Но нѣтъ надобности слишкомъ останавливаться на этихъ безплодныхъ преніяхъ, отъ которыхъ наука ничего не выигрываетъ и которыя не освѣщаютъ вопроса даже исторически. Однимъ словомъ хотя опубликованіе Ньютона произошло позднѣе опубликованія Лейбница, доказано, что онъ ничѣмъ ему не обязанъ, но все заставляетъ думать, что онъ ни въ чемъ ему и не помогъ. При отсутствіи положительнаго доказательства кто осмѣлился бы заподозрить Лейбница, его столь искренняго и столь преданнаго истинѣ, въ сокрытіи источниковъ, полученныхъ имъ отъ соперника? Вся его жизнь, столько разъ и столь подробно изученная, снимаетъ съ него подобное обвиненіе. Система, которую поддерживаютъ его противники, недопустима впрочемъ, сама по себѣ. Въ самомъ дѣлѣ, они обвиняютъ его въ добровольномъ сокрытіи истинъ, что многочисленные свидѣтели могли бы легко показать во время перваго опубликованія. Если одного благоразумія, за отсутствіемъ чувствъ болѣе его достойныхъ, оказалось недостаточнымъ помѣшать ему пренебречь столь тяжкимъ обвиненіемъ, заслуженно навлекая его на себя, то какъ повѣрить, что друзья Ньютона ждали бы двадцать пять лѣтъ, чтобы сорвать съ него маску? Ихъ упреки, вмѣсто того чтобы медленно растравляться горечью долгой и запоздалой распри, обрушились бы съ самаго начала, чтобы его пристыдить.

Итакъ, Лейбницъ и Ньютонъ раздѣляютъ славу открытія Дифференціальнаго исчисленія, и, хотя различно знаменитые, каждый изъ нихъ долженъ считаться почтеннымъ встрѣчею съ такимъ соперникомъ. Хотя они вполнѣ сходятся въ существѣ предмета, въ формахъ его выраженія принятыхъ ими видна печать ихъ геніевъ, столь несходныхъ между собою. Одинъ, болѣе занятый законами вселенной, чѣмъ законами человѣческаго ума, какъ кажется, видитъ въ новыхъ методахъ главнымъ образомъ орудіе для своихъ усилій постичь природу и, назначая для нихъ болѣе возвышенную цѣль лучше показалъ все ихъ значеніе. Другой, положившій свою славу въ совершенствованіи искусства открытій, болѣе ясно намѣтилъ дорогу, и мы еще нынѣ слѣдуемъ по оставленнымъ имъ на ней свѣтлымъ слѣдамъ. Первый, предъявляя свои открытія только послѣ долгаго созрѣванія формы, могъ придать своимъ трудамъ нѣчто болѣе совершенное и болѣе прочное и

заставить свою мысль бить ключомъ всѣми заключенными въ ней истинами. Второму болѣе искусному въ набрасываніи крупныхъ штриховъ, нравилось подымать самые разнообразные вопросы, будя вѣрныя и плодотворныя идеи, преслѣдовать и развивать которыя онъ предоставлялъ другимъ. Ньютонъ рѣдко считалъ себя обязаннымъ провозглашать правило, не сдѣлавъ прежде его приложенія, Лейбницъ, наоборотъ любилъ давать наставленія и выказывалъ больше склонности предлагать прекрасныя задачи, чѣмъ входить въ подробности ихъ рѣшеній. Если бы болѣе прилежный Ньютонъ опубликовалъ десятью годами раньше свою теорію флюксій, имя Лейбница все-же осталось бы однимъ изъ величайшихъ въ исторіи человѣческаго духа, но потомство, помѣщая его безусловно среди геометровъ перваго порядка, связало бы его славу по преимуществу съ философскими его идеями и съ универсальностью его работъ. Наоборотъ, если бы Лейбницъ, приступивъ раньше къ математическимъ изслѣдованиямъ, лишилъ бы своего соперника чести ихъ общаго открытія, все-таки въ книгѣ *„Принципы“* удивлялись бы попрежнему какъ величію полученныхъ результатовъ, такъ и несравненному блеску подробностей, и Ньютонъ теряя свои права на открытіе метода использованнаго въ его книгѣ съ такимъ искусствомъ остался бы на той же высотѣ среди геометровъ, какъ и нынѣ, т.-е. я хочу сказать, рядомъ съ Архимедомъ и выше всѣхъ остальныхъ.

Воздавъ справедливость каждому изъ обоихъ изобрѣтателей и снявъ съ Лейбница обвиненіе, слишкомъ легко и слишкомъ часто взводимое на него, мы все-же зашли бы слишкомъ далеко, утверждая вмѣстѣ съ Фонтенеллемъ (Fontenelle), что искренность Лейбница ни въ какомъ другомъ случаѣ не подвергалась сомнѣнію; знаменитыи геометръ, безпрерывно занятый многими предметами з -разъ, находясь въ оживленной перепискѣ съ большимъ числомъ ученыхъ которые, часто противорѣча другъ другу, сговаривались просить у него совѣтовъ и наставленій, могъ не рѣдко что-либо забывать и тѣмъ оскорблять самолюбіе того или иного изъ современниковъ, возбуждая такимъ образомъ порою противъ себя справедливое неудовольствіе.

Ограничимся выпискою слѣдующаго мѣста изъ письма Гюйгенса къ Лопиталю отъ 9 апрѣля 1693 г.

„Лейбницъ, конечно, весьма талантливъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ имѣетъ непомѣрное стремленіе выставляться, какъ это видно еще въ 13 мъ номерѣ Journal'а за тотъ же годъ, когда онъ говоритъ о своемъ анализѣ

безконечныхъ, о задачѣ локсодромій, которую Жакъ Грегоріусъ (Jac Gregorius) рѣшилъ задолго до него въ Геометрическихъ Разсужденіяхъ, о стройныхъ законахъ планетныхъ движеній, гдѣ онъ слѣдуетъ открытію Ньютона, но, примѣшивая свои мысли, портитъ его, въ своемъ построеніи цѣпной линіи, которое онъ предпочитаетъ построенію Бернулли, какъ будто это не одно и то же. Къ тому же я въ сильномъ сомнѣніи по соображеніямъ, которыя могъ бы привести, не выведено ли его построеніе изъ построенія Бернулли. Но я васъ прошу объ этомъ ничего не говорить".

Приводя эти нападки, всецѣло конфиденціальныя и, притомъ, формулированныя, можетъ быть, весьма легко, спѣшимъ прибавить, что онѣ никоимъ образомъ не даютъ права подвергать сомнѣнію научную честность Лейбница; но это-то именно и допускали слишкомъ часто по отношенію къ нему. Самъ Фонтенелль, въ похвальномъ словѣ Лейбницу, не устоялъ противъ желанія сдѣлать заманчивое сближеніе, не останавливаясь передъ мыслью, что въ немъ трудно было бы не увидѣть оскорбительнаго для его героя намека.

„Если Лейбницъ, говоритъ онъ, былъ бы плагіаторомъ, то онъ, такимъ образомъ, былъ бы уличенъ только въ этотъ разъ и походилъ бы на героя Макіавелли, который дѣйствительно добродѣтеленъ пока дѣло не идетъ о коронѣ. Красота системы безконечно-малыхъ оправдываетъ это сравненіе". Но само это послѣднее замѣчаніе весьма спорно: дифференціальное исчисленіе, столь важное по своимъ послѣдствіямъ, не представляетъ одного изъ тѣхъ блестящихъ открытій, которыя являются уму сразу во всемъ своемъ блескѣ, и ничто не доказываетъ, какъ мы уже видѣли, чтобы въ моментъ своего перваго опубликованія Лейбницъ замѣтилъ всю его важность. Его большою заслугою было уловить въ извѣстныхъ уже теоріяхъ пунктъ дйствительно существенный такимъ образомъ, чтобы извлечь изъ нихъ, для преподанія всѣмъ, методъ открытія, который только самые талантливые могли распознать въ доказательствахъ его предшественниковъ. Этимъ онъ привелъ сложныя разсужденія къ простымъ и изящнымъ выкладкамъ, замѣчая послѣднія какъ бы въ моментъ озаренія лучомъ свѣта, ученые до сихъ поръ придавали имъ неузнаваемый видъ, внося различныя поправки съ цѣлью утвердить за ними строгость. Они удовлетворялись, объявляя о результатѣ своихъ размышленій, и не заботились намѣчать достаточно ясно дальнѣйшій путь, по которому, въ свою очередь, могъ бы слѣдовать за ними кто-нибудь другой. Лейбницъ напротивъ,

не колеблясь, противопоставлялъ химерическимъ возраженіямъ, наводившимъ напрасный страхъ, интуитивныя воззрѣнія ума, безъ которыхъ не обходится никакое надлежащее знаніе. Это та природная ясность ума, которая, освѣщая самыя до тѣхъ поръ сокровенныя теоріи и давая возможность проникнуть въ нихъ, такъ сказать, съ одного взгляда, способствовала болѣе, чѣмъ все остальное, развитію ихъ слѣдствій.

Я считалъ своею обязанностью дать нѣсколько историческихъ подробностей относительно открытія дифференціальнаго исчисленія, но не въ моихъ планахъ излагать здѣсь полную исторію его успѣховъ и его развитія. Невозможно, однако, не упомянуть о роли братьевъ Ивана и Якова Бернулли, которые были непосредственными учениками Лейбница и повѣренными всякой его мысли. Ихъ имя переплетается съ именемъ Лейбница на каждой страницѣ исторіи новаго исчисленія, и это знаменитое сходство должно закрѣпить въ памяти людей ту связь, которую многія тучи нарушали въ теченіи ихъ жизни. Они воздѣлывали дифференціальное исчисленіе съ такимъ успѣхомъ, что имъ принадлежитъ, писалъ Лейбницъ, столько же, сколько ему самому. Старшій, Яковъ, въ первый разъ употребилъ исчисленіе безконечно-малыхъ при рѣшеніи механической задачи, рѣшенной уже Гюйгенсомъ и предложившимъ ее Лейбницемъ. Знаменитый авторъ новыхъ методовъ старался поощрить молодого и блестящаго ученаго и приписалъ ему непосредственно всю заслугу рѣшенія. Хотя синтетическое рѣшеніе было уже дано, немногіе геометры съумѣли бы, говоритъ онъ, примѣнить дифференціальное исчисленіе, принципы котораго *еще мало извѣстны и въ духѣ котораго, сколько я знаю, никто полнѣе не проникъ.*

Иванъ Бернулли, младшій братъ Якова, не замедлилъ пойти по той же дорогѣ и выдѣлился какъ своею проницательностью въ рѣшеніи задачъ, такъ и трудностью и интересностью тѣхъ, которыя самъ предлагалъ. Лейбницъ отнесся къ нему съ тою же заботливостью, онъ часто вдохновлялъ эти два блестящихъ ума, и они не разъ возвращали ему во всей силѣ побудительный толчокъ, полученный отъ него.

Переписка Лейбница съ братьями Бернулли образуетъ два тома. Никакой другой трудъ не заключаетъ, можетъ-быть, задачъ болѣе остроумныхъ и въ большемъ числѣ. Предложенные и рѣшенные тамъ вопросы показываютъ могущество новыхъ методовъ и проницательность знаменитыхъ авторовъ. Геометры всегда будутъ находить удовольствіе и пользу въ изученіи въ этой перепискѣ вмѣстѣ съ идеями

изобрѣтателей и самыхъ рѣшеній, которыя наука, несмотря на свои успѣхи, съ трудомъ упрощала и обобщала. Но сами по себѣ эти задачи могутъ быть присоединены только въ небольшомъ числѣ къ общему изложенію доктрины, успѣхамъ которой онѣ столько способствовали, а исторія роли братьевъ Бернулли явилась бы свѣтозарной и правдивой только при подробномъ изложеніи ихъ трудовъ.

Послѣ Лейбница, Ньютона и братьевъ Бернулли рядъ великихъ геометровъ болѣе не прерывался. Эйлеръ и Даламберъ, Лагранжъ и Лапласъ, Гауссъ и Абель, Коши и Якоби послѣдовательно направляли непрестанное движеніе математическихъ знаній, а ихъ многочисленные ученики, являвшіеся часто ихъ соперниками, помогали намъ, вдохновляясь ими, понимать и цѣнить ихъ. Я не могу ставить своею цѣлью дать здѣсь исторію успѣховъ, которыми мы имъ обязаны. Даже подробное изложеніе нынѣшнихъ теорій будетъ приводить насъ только изрѣдка къ ознакомленію съ трудами открывателей. Въ самомъ дѣлѣ, наука въ своемъ быстромъ прогрессѣ въ концѣ семнадцатаго вѣка не шла тѣмъ путемъ который мы должны будемъ избрать для изложенія ея принциповъ. Геометры тогда занимались по преимуществу рѣшеніемъ *задачъ*, превозмогая трудности по мѣрѣ того, какъ онѣ представлялись, и заботясь только о томъ, чтобы достичь цѣли. Поэтому вышло, что когда Лопиталь въ 1694 г. и Эйлеръ въ 1755 г. опубликовали труды, содержащіе, особенно труды Эйлера, вмѣстѣ съ великими и истинными взглядами многочисленные и столь превосходные примѣры, тотъ и другой изложили въ первый разъ общія теоріи, открытіе которыхъ было бы, однако, несправедливо приписывать имъ. Стремясь единственно къ распространенію науки, которую они ежедневно двигали впередъ, они ограничиваются ознакомленіемъ съ методами не разсуждая объ ихъ происхожденіи, и такъ какъ нельзя предполагать, что они претендуютъ на честь открытія всего то нѣтъ ничего скромнѣе, какъ это умолчаніе, которое, повидимому, все отдаетъ во владѣніе всѣхъ.

Итакъ, невозможно связать каждую теорію съ безспорнымъ именемъ открывателя, и описанный нами знаменитый споръ возобновлялся бы при каждомъ важномъ шагѣ въ наукѣ, если бы, подобно тому какъ много разъ хотѣли установить, что только одинъ открылъ новый путь, непремѣнно старались бы рѣшать, въ какомъ порядкѣ вступали на него геометры и докуда каждый тотчасъ продвигался впередъ. Въ самомъ дѣлѣ, нѣкоторыя истины пріобрѣтаются неявно,

какъ только вниманіе обращено на приводящій къ нимъ принципъ, и можно сказать, напр., что Замѣтка, опубликованная въ 1684 г. въ лейпцигскихъ *Acta*, не могла не привести быстро ко всей почти совокупности теорій, образующихъ первую Книгу этого труда.

Первая глава посвящена геометрическому изученію безконечно-малыхъ. Въ ней мы увидимъ, на подробно развитомъ рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ, какъ должны вестись разсужденія, чтобы быть вполнѣ строгими. Но разъ принципы установлены, въ дальнѣйшемъ изложеніи мы часто будемъ пользоваться особымъ удобнымъ языкомъ, въ которомъ нужно видѣть не что иное, какъ тѣ же самыя идеи, только болѣе кратко выраженныя. Эти сокращенія состоятъ въ непосредственномъ, и безъ указанія причины, отбрасываніи того, что дѣйствительно можетъ быть отброшено, и въ называніи однимъ и тѣмъ же именемъ, какъ если бы онѣ были тождественными, точекъ и линій, взаимная подстановка которыхъ не можетъ повліять на конечный результатъ. Такъ, напр., часто будемъ говорить: *касательная въ точкѣ кривой проходитъ черезъ безконечно-близкую точку; когда подвижная прямая остается касательною къ кривой, ее можно разсматривать въ каждое мгновеніе, какъ вращающуюся вокругъ точки касанія*; эти выраженія и многія другія, имъ аналогичныя, хотя и неправильны, но настолько приняты, что къ нимъ нужно привыкнуть, какъ къ освященнымъ временемъ терминамъ, сокращающимъ рѣчь. Для многихъ авторовъ методъ безконечно-малыхъ состоитъ въ замѣнѣ кривой многоугольникомъ съ безконечно-малыми сторонами. Эта подстановка почти всегда приводитъ къ точнымъ результатамъ, и выводимыя изъ нея доказательства всегда должны быть тщательно изслѣдованы. Они весьма просты, но ихъ ясность, болѣе видимая, чѣмъ дѣйствительная, исчезаетъ, если всмотрѣться въ нихъ ближе.

Лейбницъ и братья Бернулли, Эйлеръ и Лопиталь (*) употребляли этотъ языкъ, и хотя они дали доказательство весьма надежнаго знанія въ своихъ геометрическихъ приложеніяхъ метода безконечно-малыхъ, всё-же понятно, что, читая ихъ труды геометры, привычные къ Эвклидовой строгости, нѣсколько затруднялись принимать ихъ разсужденія, и что признанная точность результатовъ была необходима для успокоенія нѣкоторыхъ читателей на счетъ законности не слишкомъ строгаго

(*) Ньютонъ всегда такъ же безупреченъ въ формѣ, какъ строгъ по существу

языка. Знаменитая фраза Даламбера: „Идите впередъ, и вѣра къ вамъ придетъ“ ничего другого не выражаетъ. Парижская Академія Наукъ нѣкоторое время отказывалась допускать ученіе, нарушавшее, казалось, геометрическую чистоту; она дала толчокъ къ горячимъ преніямъ, въ которыхъ многіе изъ ея членовъ, съ упорствомъ преслѣдуя ложныя идеи, которыя они сами себѣ составили, и выраженія, которыя ихъ шокировали, и не желая вникнуть въ сущность вещей, оспаривали не только строгость разсужденій, но даже точность правилъ Лейбница. Эта оппозиція была полезна, заставляя *геометровъ безконечно-малыхъ* придавать болѣе ясную форму спорнымъ принципамъ, которые, можетъ-быть, плохо понимались одними только потому, что ихъ до сихъ поръ плохо объясняли другіе. Самъ Лейбницъ, котораго напослѣдокъ поняли во всемъ его значеніи и удивлялись ему величайшіе геометры Европы, не ограждался своею славою и не презиралъ критики: онъ не гнушался отвѣчать со всею учтивостью противникамъ, которыхъ уважалъ, несмотря на слабость ихъ доводовъ. Извѣстенъ его отвѣтъ въ *Journal* ѣ *de Trevoux* по необычайной уступчивости, признающей, какъ казалось, ту недостаточность строгости, въ которой его упрекали. Въ самомъ дѣлѣ, онъ уподобляетъ безконечно-малыя разныхъ порядковъ несравнимымъ между собою величинамъ вслѣдствіе ихъ крайняго неравенства, подобно песчинкѣ и земному шару. Такой языкъ, нужно признаться, не обозначаетъ ничего точнаго и повелъ бы къ смѣшенію безконечно-малой съ очень малою величиною. Лейбницъ походитъ въ этомъ случаѣ, говоритъ Фонтенелль, на архитектора, который возвелъ столь смѣлое зданіе, что самъ не осмѣливается въ немъ поселиться, тогда какъ другіе, болѣе довѣрчивые, поселяются тамъ безъ страха и, что важнѣе, безъ несчастнаго случая. Но къ этой цитатѣ должно прибавить, что такъ какъ письмо Лейбница написано не для геометровъ, то уступка слишкомъ, повидимому, робкая, была, можетъ-быть, только благоразумною. Притомъ Лейбницъ на счетъ этого пункта отсылаетъ къ труду Лопиталя, который излагаетъ его съ точностью и простотою. Впрочемъ, всякое пререканіе не замедлило исчезнуть послѣ точнаго опредѣленія употребляемыхъ терминовъ, и эти вещи были освѣщены и глубоко изслѣдованы столькими работами, что болѣе нѣтъ здѣсь ни одного облачка, что все въ настоящее время кажется простымъ и строгимъ въ началахъ легко доступной науки и что болѣе уже не помышляютъ называть ее *трансцендентною*.

Основная идея теоріи дифференціаловъ состоитъ въ разысканіи,

въ приращеніи какой-угодно функціи, части, пропорціональной приращенію перемѣнной, которая и получаетъ названіе *дифференціала*. Она получается столь легко для функцій простыхъ или сложныхъ, явныхъ или неявныхъ, что самый кропотливый историкъ не считалъ бы для себя обязательнымъ приписывать честь открытія каждаго правила тому, кто его первый высказалъ. Разсмотрѣніе функцій отъ многихъ перемѣнныхъ служитъ естественнымъ и необходимымъ дополненіемъ первоначальной идеи Лейбница, который, такъ же какъ и Ньютонъ, не имѣлъ случая этимъ заняться. *Трактатъ о Безконечно-малыхъ* (*Traité des Infiniment petits*) Лопиталя, опубликованный въ 1654 г., посвященъ исключительно функціямъ отъ одной перемѣнной. Однако переходъ отъ одного случая къ другому столь естественъ, что когда Эйлеру понадобилось дифференцировать функцію отъ двухъ перемѣнныхъ x и y, онъ пишетъ непосредственно результатъ подъ видомъ $Pdx + Qdy$ и даже не отмѣчаетъ въ наукѣ введенія новой идеи. Дѣйствительно, хотя правила Лейбница не имѣли въ виду этой болѣе общей задачи, они къ ней прилагаются и часто даже рѣшаютъ ее вполнѣ. Когда напр., привыкли къ формулѣ

$$d.ab = adb + bda,$$

разсматривая a и b, какъ двѣ какія-угодно функціи отъ одной и той же перемѣнной x, то, если нужно дифференцировать то же произведеніе ab, но при независимыхъ перемѣнныхъ, вполнѣ естественно употребить ту же самую формулу, и, несмотря на всю важность возникающаго новаго вопроса, понятно, что нѣтъ основанія разсматривать, какъ открытіе, это распространеніе столь извѣстной формулы, въ выраженіи которой къ тому же не приходится ничего измѣнять.

Какъ бы то ни было, мы не имѣемъ ничего существеннаго прибавить къ тому, что содержитъ Дифференціальное исчисленіе Эйлера относительно первыхъ дифференціаловъ функціи отъ многихъ перемѣнныхъ.

Теорія опредѣлителя какого-угодно числа функцій, содержащихъ такое же число перемѣнныхъ, составляетъ предметъ главы III. Эта теорія, находящаяся далеко не въ непосредственной связи съ первоначальною идеей, есть также гораздо болѣе недавняго происхожденія и почти всецѣло принадлежитъ Якоби. Опредѣленіе для этого опредѣлителя таково, что въ случаѣ одной функціи онъ приводится къ производной. Кромѣ того, аналогія между опредѣлителями и производными полная

и важность приложеній, сдѣланныхъ въ большинствѣ знаменитымъ авторомъ теоріи, даетъ этой остроумной идеѣ право считаться въ числѣ принциповъ науки.

Непосредственно за теоріеи дифференціаловъ перваго порядка мы помѣстили ея приложеніе къ изученію касательныхъ и касательныхъ плоскостей, которое изъ всѣхъ возможныхъ ея приложеній является за-разъ однимъ изъ самыхъ знаменитыхъ, самыхъ важныхъ и самыхъ простыхъ. Однако можно, пожалуй, удивиться, что глава посвященная геометріи, прерываетъ изложеніе аналитическихъ принциповъ: но, я думаю нѣтъ никакого неудобства въ томъ, чтобы приступить непосредственно къ геометрическимъ вопросамъ, изученіе которыхъ не требуетъ отъ читателя никакой новой идеи. Теоріи, которыя подобно теоріи кривизны поверхностей, обыкновенно не входятъ въ курсъ элементарнаго изученія, будутъ, напротивъ, съ большею пользою помѣщены послѣ изложенія дифференціальнаго исчисленія, потому что, хотя онѣ и представляютъ весьма интересное приложеніе принциповъ, относящихся къ дифференціаламъ второго порядка, но не являются ихъ геометрическимъ переводомъ.

Опредѣленіе касательныхъ плоскостей вполнѣ естественно соединено съ опредѣленіемъ касательныхъ, хотя, въ историческомъ порядкѣ, оно послѣдовало за нимъ много лѣтъ спустя. Паранъ (Parent), въ своихъ *Essais et Recherches de mathematiques et de physique*, первый заговорилъ о представленіи поверхности посредствомъ уравненія между тремя перемѣнными но онъ не далъ общаго уравненія *касательной плоскости*. Иванъ Бернулли, не давая его явно, долженъ былъ ввести въ формулы при рѣшеніи одной трудной задачи опредѣляющіе его элементы. При чтеніи его Мемуара видно, что ему было бы весьма легко его получить, но не должно, однако, считать поэтому Бернулли *создателемъ* теоріи касательной плоскости, которая на самомъ дѣлѣ никому не принадлежитъ.

Теорія огибающихъ естественно нашла мѣсто въ главѣ, посвященной касательнымъ. Постигнутая Лейбницемъ съ самаго начала новыхъ исчисленій, она весьма просто примыкаетъ къ предыдущей теоріи и подобно ей требуетъ разсмотрѣнія только производныхъ перваго порядка. Правда, ее можно разсмотрѣть, какъ обобщеніе теоріи эволютъ Гюйгенса или каустическихъ кривыхъ Чирнгауза (Tschirnhaus). Но эти огибающія особаго рода будутъ изучены въ другой главѣ, гдѣ мы изложимъ отличительныя ихъ свойства.

Глава V дополняетъ теорію дифференціаловъ перваго порядка; она содержитъ выраженіе дифференціала нѣкоторыхъ геометрическихъ функцій и, въ частности, длины дуги кривой. Хотя такое изслѣдованіе принадлежитъ Геометріи, но оно предполагаетъ у читателя только тѣ идеи, которыя, со времени появленія теоріи Лейбница, были непосредственно въ ходу у всѣхъ геометровъ. Изученіе дугъ кривой занимаетъ большое мѣсто въ исторіи науки, и интегральное исчисленіе обязано ему происхожденіемъ своихъ наиболѣе прекрасныхъ общихъ теорій; но эти вопросы будутъ разсмотрѣны въ другомъ томѣ, въ этомъ же мы можемъ едва лишь ихъ намѣтить.

Теорія производныхъ высшаго порядка и теорія измѣненія независимой перемѣнной, которая по существу есть только разысканіе общихъ формулъ, дающихъ производныя отъ неявныхъ функцій, образуютъ главы VI и VII. Рѣшенные тамъ вопросы возникаютъ сами собою, и рѣшеніе ихъ не могло бы остановить никакого геометра, достойнаго этого имени. Можетъ показаться, что упрощенія, которыя можно внести въ послѣдовательное вычисленіе производныхъ, относящееся скорѣе къ преподаванію, чѣмъ къ самымъ принципамъ науки, переполнены подробностями, но послѣднія даютъ намъ заранѣе нѣсколько результатовъ, использованныхъ ниже въ теоріи рядовъ.

Формулы для замѣны независимой перемѣнной, въ случаѣ одной перемѣнной, были даны въ первый разъ въ *Traité des infiniment petits* Лопиталя, а полное изложеніе общей теоріи занимаетъ видное мѣсто въ *Дифференціальномъ исчисленіи* Эйлера, который не обходитъ въ своихъ методахъ ни одного изъ полезныхъ или любопытныхъ случаевъ, какіе могутъ представиться для разсмотрѣнія.

Глава VIII посвящена составленію дифференціальныхъ уравненій. Эти уравненія должны были естественно возникнуть изъ обратныхъ задачъ, относящихся къ касательнымъ, и нельзя было не увидѣть тотчасъ же, какъ и замѣтилъ это первымъ Иванъ Бернулли, что одному и тому же дифференціальному уравненію соотвѣтствуетъ безчисленное множество кривыхъ, общее уравненіе которыхъ содержитъ произвольную постоянную. Отсюда до исключенія постоянной посредствомъ дифференцированія всего одинъ шагъ, который долженъ былъ неизбѣжно повести къ исключенію многихъ постоянныхъ посредствомъ производныхъ высшаго порядка. Эйлеръ былъ первымъ, изложившимъ эту теорію. Однако, я повторяю приписывать ему ея открытіе было бы несправедливостью по отношенію къ Лейбницу и братьямъ Бернулли. Къ тому же

самъ онъ сдѣлалъ только наброски теоріи исключенія произвольныхъ функцій; мы даемъ сдѣланное Монжемъ важное ея приложеніе къ изученію различныхъ классовъ поверхностей. Между работами, создавшими эту часть науки, отмѣтимъ, наконецъ, превосходный Мемуаръ Ампера (Ampère), къ которому намъ предстоитъ еще вернуться.

Переписка геометровъ восемнадцатаго вѣка представляетъ, почти на каждой страницѣ, упражненія или дальнѣйшія раскрытія для одной важной теоріи, которая, зародившись одновременно съ дифференціальнымъ исчисленіемъ, часто прилагаемая къ рѣшенію тѣхъ же самыхъ задачъ и развиваясь вмѣстѣ съ нимъ, получила сама и доставила послѣднему такія вспомогательныя средства, что въ настоящее время почти необходимо изучать ихъ одновремено.

Книга II посвящена изложенію этого ученія, краткую исторію котораго мы должны здѣсь набросать.

Отыскивая начало употребленія безконечнаго ряда, можно подняться до Архимеда. Методъ, которымъ онъ пользуется для нахожденія площади, ограниченной параболою, предполагаетъ, дѣйствительно, суммированіе безконечной прогрессіи. Въ *Трактатѣ о винтовой линіи* онъ былъ приведенъ, подобно впослѣдствіи Кавалери, Паскалю и Валлису, къ разсмотрѣнію площади части кривой, какъ суммы безконечнаго числа элементовъ; но здѣсь нѣтъ рядовъ въ собственномъ смыслѣ потому что эти элементы перемѣнны и уменьшаются по мѣрѣ увеличенія ихъ числа, тогда какъ члены ряда, взятые также въ безконечномъ числѣ, имѣютъ, каждый, постоянное значеніе, стремящееся, конечно, къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи мѣста члена. Кромѣ того, эти суммы элементовъ являлись переходными формами, на которыхъ нельзя было останавливаться и которыя сами по себѣ не принесли бы никакой помощи.

Отмѣтимъ еще разысканіе квадратуры, приведшее Меркатора (Mercator) къ знаменитому ряду, представляющему $l(1+x)$; доказательство этого ряда, предшествовавшее открытію дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій, въ сущности приводится къ замѣнѣ дроби $\frac{1}{1+x}$ безконечною прогрессіей и затѣмъ къ интегрированію обѣихъ частей уравненія. Этотъ рядъ, опубликованный въ 1672 г. въ трудѣ, озаглавленномъ *Logarithmotechnia*, есть первый примѣръ формулы, составленной изъ безпредѣльнаго числа членовъ и употребленной съ пользою для числового вычисленія представляемаго ею выраженія: каждая изъ частей,

составляющихъ доказательство Меркатора, была тогда хорошо извѣстна. Гюйгенсъ показалъ тождество логариѳмовъ съ гиперболическими площадями, а *Arithmetica infinitorum* Валлиса давала площадь кривыхъ, ордината которыхъ пропорціональна степени абсциссы, т.-е., на нашемъ теперешнемъ языкѣ, интегралъ каждаго изъ членовъ прогрессіи. Единственная, но великая заслуга Меркатора заключается, слѣдовательно въ томъ, что онъ обратилъ вниманіе на безконечное выраженіе, которое, безъ сомнѣнія, не трудно было составить, но важности котораго не замѣтилъ бы менѣе проницательный геометръ.

Когда Меркаторъ опубликовалъ свое открытіе, Ньютонъ уже нѣсколько лѣтъ владѣлъ основною идеей, приводящей къ нему, и сообщилъ ее Барроу, нѣкогда своему учителю, а тогда своему коллегѣ, представивъ ему рукопись Трактата подъ заглавіемъ: *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas.* Ньютонъ въ этомъ небольшомъ Трактатѣ переноситъ, такъ сказать, въ алгебраическое исчисленіе методы Ариѳметики. Ряды, расположенные по степенямъ перемѣнной, являются въ его глазахъ, обобщеніемъ десятичныхъ дробей, могущихъ представлять всѣ числа. Подобно тому какъ эти десятичныя дроби участвуютъ въ свойствахъ цѣлыхъ чиселъ и такъ же легко, какъ они, поддаются вычисленію, такъ и ряды преобразовываютъ дробныя или ирраціональныя выраженія въ цѣлые многочлены и приводятъ весьма сложныя выраженія къ однообразному и простому типу. Хотя этотъ способъ развертыванія съ пользою прилагается къ множеству задачъ, но именно въ виду, главнымъ образомъ, квадратуры кривыхъ Ньютонъ разсматриваетъ его въ первую очередь. Какъ и Меркаторъ, онъ воспользовался формулою Валлиса, выражающею площадь кривой, ордината которой пропорціональна степени абсциссы; но онъ идетъ гораздо дальше его, прилагая этотъ методъ не только къ явнымъ алгебраическимъ функціямъ, но и къ рѣшенію буквенныхъ уравненій корень которыхъ онъ развертываетъ въ рядъ, и находя, наконецъ, выраженіе дуги круга въ функціи его синуса, а затѣмъ, по открытому имъ методу возврата рядовъ, разложеніе синуса въ рядъ по степенямъ дуги. Въ этомъ первомъ опытѣ знаменитый авторъ довольствуется составленіемъ членовъ разложенія, не заботясь о доказательствѣ ихъ общаго выраженія которое онъ угадываетъ по аналогіи. Формулы для разложенія степени бинома здѣсь нѣтъ, лишь гораздо позднѣе, въ 1676 г., въ письмѣ къ Ольденбургу онъ подробно набрасываетъ, какъ онъ пришелъ къ ея предсказанію, а затѣмъ и къ подтвержденію ея справедливости. Это небольшое произве-

деніе Ньютона Барроу сообщилъ нѣсколькимъ геометрамъ и возбудилъ въ нихъ сильное удивленіе; но Ньютонъ далеко не былъ тронутъ такими похвалами и пересталъ съ этого момента развивать свои идеи, убѣжденный, что Меркаторъ, вступивъ на этотъ путь, легко найдетъ остальное, прежде чѣмъ онъ самъ достигнетъ *достаточно зрѣлаго возраста, чтобы что-нибудь опубликовать*: ему было тогда двадцать шесть лѣтъ и онъ уже владѣлъ, кромѣ метода рядовъ, принципами исчисленія флюксій и разложеніемъ свѣта! Когда слава Ньютона вызвала по отношенію къ его менѣе значительнымъ дѣяніямъ мелочныя разслѣдованія потомства, всѣ эти факты были поставлены внѣ всякаго сомнѣнія и не могутъ быть оспариваемы: но если бы дѣло шло о комъ бы то ни было другомъ, развѣ молчаніе, которое онъ хранилъ передъ публикою, не способствовало бы установленію для его изслѣдованій болѣе поздней даты, чѣмъ для опубликованія Меркатора? Какъ это вѣрно, что только съ крайнею осторожностью должно разсуждать о такихъ вопросахъ.

Немного спустя Грегори открылъ рядъ, выражающій дугу въ функціи ея тангенса; также открылъ этотъ рядъ и Лейбницъ послѣ него, но при помощи другихъ принциповъ и не будучи знакомъ съ результатомъ Грегори. Оба они должны считаться среди создателей теоріи рядовъ. Равнымъ образомъ мы должны упомянуть и о Яковѣ Бернулли, открывшемъ общую теорему, дающую выраженіе какой-угодно функціи въ видѣ ряда, члены котораго содержатъ множителемъ ея послѣдовательныя производныя, и являющуюся непосредственнымъ слѣдствіемъ гораздо болѣе важнаго разложенія, открытаго позже Тэйлоромъ.

Трудъ Тэйлора (Taylor) подъ заглавіемъ *Methodus incrementorum* содержитъ, вмѣстѣ съ прекраснѣйшими приложеніями новый способъ представленія анализа безконечно-малыхъ въ связи съ исчисленіемъ конечныхъ разностей. Въ этомъ именно трудѣ онъ далъ впервые знаменитую теорему, носящую его имя, значеніе которой непрестанно потомъ росло въ трудахъ величайшихъ геометровъ. Всѣ извѣстные до тѣхъ поръ ряды являются легкими ея слѣдствіями, и изъ нея можно получить безчисленное множество другихъ рядовъ. Тэйлоръ, однако, не далъ ни одного изъ нихъ, и этимъ объясняется почему вначалѣ геометры придали повидимому, такъ мало значенія его открытію. Еще и нынѣ теорема Тэйлора, незначительно измѣненная, часто слыветъ подъ именемъ теоремы Маклорена и часто цитировалась, какъ принадлежащая Даламберу (d Alembert), который, не зная о ея гораздо болѣе раннемъ опубликованіи, далъ ее какъ новость въ *Энциклопедіи*.

Впрочемъ, Тэйлоръ далеко не вполнѣ изслѣдовалъ вопросъ; изученіе условій, необходимыхъ для сходимости его ряда, было выполнено лишь мало-по-малу. Знаменитые геометры считали важнымъ дать новыя доказательства, которыя дѣлали бы ихъ очевиднѣе, и еще очень недавно Коши (Cauchy) заключилъ ихъ, наконецъ, въ одно общее правило, на которое онъ не безъ основанія смотрѣлъ, какъ на одно изъ своихъ наиболѣе важныхъ открытій.

Въ настоящее время всѣ геометры согласны во взглядѣ на сходимость ряда, какъ на необходимое условіе его законнаго употребленія. Раздѣляли этотъ взглядъ, который является, впрочемъ, столь естественнымъ, и первые создатели этой великой теоріи. Ряды, которыми они пользовались, должны были всегда, по ихъ мнѣнію, давать численное значеніе развернутой функціи. Лейбницъ явился первымъ, пожелавшимъ правилъ сходимости.

Въ письмѣ, адресованномъ имъ Герману, отъ 2 іюля 1705 г. читаемъ:

„Я не требую нахожденія значенія какого-угодно ряда въ конечномъ видѣ; такая задача превышала бы силы геометровъ. Я желалъ бы только, чтобы нашелся способъ рѣшать, возможно ли значеніе, выраженное посредствомъ ряда, т.-е. сходящееся ли оно, и, притомъ, рѣшать безъ знакомства съ происхожденіемъ ряда. Необходимо, чтобы безконечный рядъ представлялъ конечное количество, чтобы можно было доказать его сходимость и убѣдиться что при достаточномъ его продолженіи ошибка можетъ стать сколь-угодно малою“.

Долго, однако, геометры, почти безъ исключенія принимали относительно этого пункта очень странную доктрину, не довольствуясь приложеніемъ разложеній въ ряды къ законнымъ случаямъ, гдѣ они являются сходящимися, они считали себя въ правѣ распространять ихъ безъ ограниченія. Общность, присущая алгебраическимъ формуламъ ввела по этому пункту въ обманъ самыхъ осторожныхъ и самыхъ искусныхъ: принимая ряды за многочлены, они считали возможнымъ выполнять надъ ними безбоязненно дѣйствія и преобразованія, признаваемыя законными для суммы какого-угодно числа членовъ, и долгое время не признавали специальныхъ необходимостей, налагаемыхъ условіемъ сходимости. Эйлеръ, первый ясно высказавшій такое мнѣніе, полагалъ, что разсужденіе, куда входятъ расходящіеся ряды, достаточно точно, какъ только продолженіе вычисленій приводитъ къ результату въ конечныхъ выраженіяхъ или къ сходящемуся ряду.

Принятіе такихъ принциповъ столь мудрымъ умомъ, который повсюду въ другихъ мѣстахъ такъ хорошо понималъ и почиталъ математическую строгость, есть одно изъ тѣхъ противорѣчій, въ которыя впадаетъ иногда человѣческій умъ и отъ объясненія которыхъ надо отказаться. Какъ бы то ни было, нѣсколько счастливыхъ приложеній заняли мѣсто доказательства, которое невозможно было дать и котораго долгое время никто не думалъ требовать.

Только въ началѣ девятнадцатаго вѣка Пуассонъ вернулъ геометровъ на путь истины и строгости, показавъ, къ какимъ результатамъ можетъ привести употребленіе расходящихся рядовъ. Нѣсколько энергичныхъ строкъ Гаусса и Абеля также посодѣйствовали прекращенію этого геометрическаго скандала и помогли прочно установить безусловную необходимость сходимости, заставляя исчезнуть изъ науки ошибку, которая, затронувъ принципы, могла бы повести за собою множество другихъ ошибокъ. Но безполезно задерживаться на доктринѣ которую ничто не оправдываетъ и которая опровергается простымъ разсмотрѣніемъ вытекающихъ изъ нея нелѣпыхъ слѣдствій.

Правила, позволяющія судить о сходимости ряда, пріобрѣли новое значеніе, когда эта сходимость была признана необходимою. Рѣшеніе задачи въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ такъ же древне, какъ и употребленіе рядовъ; но глубокое изслѣдованіе было сдѣлано лишь очень поздно и очень медленно.

Прежде всего мы можемъ привести нѣсколько почти очевидныхъ правилъ, данныхъ Даламберомъ и относящихся къ численнымъ рядамъ, выраженіе остатка ряда Тэйлора, данное Лагранжемъ, изслѣдованіе важнаго ряда, для котораго Гауссъ далъ условіе сходимости, связывая его съ изящными правилами, и, наконецъ, многочисленные методы, отъ которыхъ можетъ ускользнуть лишь очень немного случаевъ, для сужденія о сходимости численныхъ рядовъ съ положительными членами.

Къ ученію объ условіяхъ сходимости рядовъ мы должны были присоединить изложеніе методовъ, облегчающихъ приближенное ихъ суммированіе въ случаѣ ихъ медленной сходимости. Мы излагаемъ три метода, покоящихся на весьма различныхъ принципахъ; каждый изъ этихъ методовъ можетъ, въ извѣстныхъ случаяхъ, оказаться выгоднѣе двухъ остальныхъ. Одинъ изъ нихъ принадлежитъ Стирлингу, второй Эйлеру и третій, обладающій большимъ изяществомъ, былъ предложенъ Куммеромъ (Kummer).

Рядъ Тэйлора, вслѣдствіе своей большой общности, долженъ былъ болѣе, чѣмъ всякій другой, приковать къ себѣ вниманіе геометровъ; выраженіе остатка, послѣдовательно полученное подъ различными видами, болѣе или менѣе приноровленными къ наиболѣе замѣчательнымъ случаямъ, какіе приходилось изслѣдовать, повидимому, являлось, до прекрасныхъ трудовъ Коши, послѣднимъ словомъ вопроса, разсмотрѣннаго въ отвлеченномъ видѣ. Углубляясь въ результатъ Тэйлора и не считаясь съ принятой имъ точкою зрѣнія, мы тотчасъ и довольно легко замѣчаемъ въ немъ обобщеніе принципа, на которомъ покоится дифференціальное исчисленіе: безконечно-малое приращеніе функціи, какова бы она ни была, пропорціонально, если пренебречь безконечно-малыми порядка выше перваго, приращенію перемѣнной; исключенія, возможность которыхъ очевидна, такъ какъ функція остается неопредѣленною, могутъ относиться лишь къ нѣкоторымъ отдѣльнымъ значеніямъ перемѣнной и теорема вообще и для всякой непрерывной функціи остается неизбѣжно точною. При изученіи вопроса ближе, ограничиваясь однако, всегда случаемъ безконечно малаго приращенія, мы докажемъ, что избытокъ приращенія функціи надъ частью, которую можно назвать главною и пропорціональною приращенію перемѣнной, является неизбѣжно пропорціональнымъ квадрату этого послѣдняго, если пренебречь безконечно-малыми порядка выше второго: главная часть того, что отбрасывается при этомъ второмъ приближеніи, сама пропорціональна кубу приращенія перемѣнной, и т. д. безъ конца, при чемъ возможныя исключенія относятся не къ отдѣльнымъ функціямъ, такъ какъ теорема есть необходимое слѣдствіе изъ закона непрерывности, но къ спеціальнымъ значеніямъ перемѣнной, для которыхъ наступаетъ разрывъ непрерывности.

Этотъ весьма важный и весьма свѣтлый взглядъ на теорему Тэйлора не давалъ бы, однако, полнаго ея пониманія.

Коши выпала честь быть первымъ, связавшимъ этотъ важный вопросъ съ его истинными принципами. Возможность или невозможность разложенія функціи по формулѣ Тэйлора можно выяснить, не прибѣгая къ вычисленію самыхъ членовъ ряда, лишь бы только функція, которую требуется развернуть, была опредѣлена для вещественныхъ и мнимыхъ значеній перемѣнной. Это введеніе мнимостей въ вопросъ, вполнѣ чуждый на первый взглядъ ихъ теоріи, есть одинъ изъ величайшихъ успѣховъ въ девятнадцатомъ вѣкѣ, которымъ анализъ обязанъ Коши.

Мнимыя выраженія являются необходимымъ слѣдствіемъ простѣй-

шихъ фор у ь Алгебры; корни невоз ожны хъ уравнеш г р о
ени имѣютъ видъ $\sqrt{\ }$ 1, которыи вмѣстѣ съ тѣмъ есть ви ъ
ней всякого ы ебраическаго уравненія и вообще резуль атъ какихъ-
угодно алгебраическихъ дѣйствій, выполненныхъ на ц ами ыр я
ніями. Эти теоремы были приняты геометрами раньше ихъ строгаго
доказательства. Эйлеръ изла ъ ихъ въ 1742 г. въ *M* *и a B*
какъ очень извѣстныя. Однако только въ 1746 . появляе я ер ое
общее доказательство данное Даламберомъ, доказте ь тв на о
зиться, недостаточное также как и всѣ тѣ которыя бы и ть до
Мемуара, въ которомъ Гауссъ вновь прини ет э отъ в про ь
послѣ справедливой критики разсужденій пред оженныхъ
Немногіе, впрочемъ, вопросы ч ще подвергались изслѣд нію Г сь
посвятилъ ему не менѣе пяти Мемуар въ, а Коши которо у ч с о ри
писывали первое строгое доказательство неоднократно в звращ с
къ нему самъ.

Н только алгебраическ я ѣйствія выполненныя н дъ нимыми и
раженія и, дають въ результатѣ выраженія того ж ви но ж е и
логариѳмъ мнимаго выраженія допускаетъ безчисленно ножество зна
ченій, всѣ вида $a+b\sqrt{\ }$ 1, и степень съ мнимымъ пок зателемъ можетъ
быть представлена подъ тѣмъ ж видомъ, котором всег а прих
дити. Въ этомъ заключается важное открытіе Эйлера
отъ ѣдѣ ет чести го проницательности что изслѣдованія Ле
и Берну и по этому предмет
вс его трудно ти. Эйлеръ ра с ялъ вс ѣ туни, давъ выр же е тр
но ет ических линій средствомъ показате ьныхъ мнимос ей
ведено столько прекрасных с ѣдствій, ук нных в начи е ьно
ч с имъ амимъ Приводимъ здѣсь то ко р ложеніе ригон ри
че к хъ линіи въ произведенія и тѣ многочисленныя фор ы ъ к т
рымъ оно приводитъ и доказательства ко орыхъ надо озн ся
во по абыя были потом дтверж ы о ѣ стр гиъ ана из
Эйлеру же мы обязаны рядами выражающими синусы к и с
кратной дуги въ функ и цѣлых степ и син с или косинус
обратно, степени синуса и и косинуса въ вид ря а чен к т р
синусы или косинусы кр тных д ъ ре ульт ты которые онъ
подвержены, правда о раничениямъ к орыхъ ъ не нал и гео-
метры, об нувшись въ св их иде х относит льно о щ и е
бранческихъ формулъ, долгое время не овѣряли имъ П сонъ ервы

отмѣтилъ въ нихъ противорѣчіе, объясненіе которому не было дано непосредственно; но въ математическихъ знаніяхъ формулы никогда не противорѣчатъ самимъ себѣ, и если въ нихъ оказывается какая-нибудь парадоксальность, можно утверждать, что болѣе внимательное изслѣдованіе ее устранитъ. Дѣйствительно, Пуансо не замедлилъ, въ своемъ Мемуарѣ объ угловыхъ сѣченіяхъ, точно установить смыслъ и условія справедливости этихъ различныхъ разложеній. Изслѣдованіе вопросовъ о сходимости, къ сожалѣнію, не нашло мѣста въ его трудѣ, и впервые произведено Абелемъ, въ его важномъ Мемуарѣ о биномѣ.

Этотъ Мемуаръ Абеля приводитъ насъ къ теоріи мнимыхъ функцій, отъ которыхъ мы какъ будто удалились, говоря о тригонометрическихъ рядахъ. Знаменитый норвежскій геометръ изучаетъ въ немъ, съ почти небывалою до тѣхъ поръ строгостью въ вопросахъ этого рода, рядъ бинома, въ которомъ онъ предполагаетъ подъ входящими туда буквами мнимыя значенія. Дѣло для него шло не о томъ, чтобы только знать *остается ли* формула Ньютона *справедливою* и попрежнему представляетъ $(1+x)^m$, когда x и m мнимые. Такое предложеніе не имѣло бы никакого опредѣленнаго смысла. Въ самомъ дѣлѣ, рядъ является вполнѣ опредѣленнымъ при данныхъ x и m, функція же допускаетъ, по опредѣленію, безчисленное множество значеній; какое изъ нихъ представляетъ рядъ? Абель вполнѣ рѣшаетъ вопросъ, подготовляя такимъ образомъ изслѣдованіемъ труднаго и важнаго частнаго случая общую теорію, которую немного спустя создалъ Коши и которая быстро завоевала такое значеніе, что мы должны особенно на ней остановиться.

Чобы понять важность этой теоріи, нужно, во-первыхъ, составить себѣ ясную идею о степени общности, заключающейся въ слѣдующемъ выраженіи: *какая-угодно мнимая функція*, и не позволять себѣ обманываться аналогіей, весьма ошибочной на этотъ разъ, съ какою-угодно вещественною функціею.

Мы имѣемъ весьма ясное понятіе о степени неопредѣленности, входящей въ выраженіе: *какая-угодно функція отъ вещественной перемѣнной*. Мы подразумѣваемъ, что можно, для каждаго значенія перемѣнной, выбирать по своему произволу значеніе функціи, такъ чтобы выборъ не былъ стѣсненъ никакимъ другимъ условіемъ кромѣ условія давать непрерывный рядъ, представляющій точки кривой, видъ которой остается произвольнымъ. Аналогія совершенно естественно заставляетъ разсматривать какую-угодно мнимую функцію какъ заключаю

щую ту же степень неопредѣленности и могущую получать для данного значенія перемѣнной $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ по произволу значенія для обѣихъ частей, какъ для вещественной такъ и для мнимой безъ всякаго иного ограниченія кромѣ ограниченій вытекающихъ изъ условія непрерывности. Однимъ словомъ, если принять α, β за координаты точки третья координата которой есть вещественная часть соотвѣтственнаго значенія произвольной функціи то должно думать что поверхность, описанная этою точкою, вообще произвольна подобно порождающей ее функціи; но это было бы тяжкою ошибкою. Въ самомъ дѣлѣ, условіе имѣть опредѣленную производную равнозначительно двумъ уравненіямъ которымъ подчинены какъ вещественная, такъ и мнимая часть какой-нибудь одной функціи и которыя мы будемъ предполагать всегда удовлетворенными. Существованіе этихъ уравненій показываетъ какимъ образомъ функція, опредѣленіе которой не должно можетъ имѣть однакожъ весьма опредѣленныя свойства и объясняетъ появленіе прекрасныхъ теоремъ Коши которыя безъ этого были бы непонятны. Мы ограничиваемся въ этомъ томѣ указаніемъ какъ безконечныя или недостаточно опредѣленныя значенія функціи даютъ предѣлы, внѣ которыхъ ея разложеніе невозможно. Мы вернемся къ этому въ другомъ томѣ гдѣ интегральное исчисленіе представитъ доказательства, давая возможность дополнить ихъ. Эта теорія какъ утверждаетъ Лагранжъ въ своемъ знаменитомъ трудѣ тѣмъ болѣе важна что теорема Тэйлора которую далеко не я разсматривалъ какъ слѣдствіе изъ дифференціальнаго исчисленія должна доказываться раньше и содержитъ истинные принципы этого исчисленія, свобожденные отъ всякой идеи о безконечно-малой величинѣ или предѣлѣ. Доказательство данное знаменитымъ авторомъ, не смотря на внушительный авторитетъ его имени не могло быть принято геометрами но это не можно умалять удивленія передъ столь категорическимъ хотя и недоказаннымъ утвержденіемъ принципа, который, утвержденный полстолѣтія спустя на совершенно другихъ основаніяхъ, положенъ былъ въ то же время пріобрѣтя такую степень общности и какой сторонникъ этихъ идей тогда даже и не мечтали. Видя сколько нужно тонкихъ объясненій для установленія значенія и предѣловъ теоремы Тейлора становится понятнымъ что она затрогиваетъ частью слишкомъ трудныя чтобъ можно было дѣлать ее, какъ хотелъ Лагранжъ краеугольнымъ камнемъ зданія къ какой бы ни общной и легкой доктринѣ ни пришлось бы

геометры, подымаясь сразу на такую высоту, они не могутъ забывать, что точность высказанныхъ положеній и безусловная солидность доказательствъ служатъ существеннымъ признакомъ математическихъ знаній, и если извинительно уклониться отъ нихъ на моментъ для скорѣйшаго достиженія главной цѣли, то всё-же никакая строгость не оказалась бы чрезмѣрною, когда идетъ дѣло объ установленіи основаній для длиннаго ряда теорій.

Когда въ рядѣ Тэйлора приписывается перемѣнной мнимое значеніе, онъ преобразовывается въ рядъ, расположенный по синусамъ и косинусамъ дугъ, кратныхъ относительно одной и той же дуги. Ряды этого рода, имѣющіе такое значеніе въ настоящее время, впервые были разсмотрѣны Даніиломъ Бернулли, который посредствомъ остроумныхъ, но чрезвычайно смѣлыхъ пріемовъ, и, надо даже признаться, очень далекихъ отъ строгости, далъ выраженіе для постоянной, для перемѣнной x, для квадрата и куба этой перемѣнной въ видѣ подобнаго ряда. Достаточно указать здѣсь на то, что точкою отправленія для доказательства служитъ уравненіе

$$\frac{1}{2} = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx + \ldots,$$

которое Бернулли называетъ *incongrue vera* и которое слѣдовало бы просто назвать невѣрнымъ и не имѣющимъ смысла, потому что вторая часть, очевидно, неопредѣленна. Годъ спустя Эйлеръ, обративъ вниманіе на эти вопросы, связалъ ихъ съ своею теоріею мнимыхъ показательныхъ функцій; но только въ девятнадцатомъ вѣкѣ важное приложеніе, сдѣланное Фурье, послужило толчкомъ къ новымъ работамъ, показывающимъ, во всей строгости, возможность представлять посредствомъ рядовъ этого рода всѣ, непрерывныя или разрывныя функціи. Но этотъ важный предметъ не можетъ быть разсмотрѣнъ въ этомъ томѣ, и мы приведемъ здѣсь лишь простые и не совсѣмъ строгіе методы Эйлера.

Распространяясь столько, сколько мы это сдѣлали относительно теоріи рядовъ, невозможно было не встрѣтить множества изящныхъ и знаменитыхъ результатовъ выводимыхъ изъ общихъ формулъ. Должно однакожъ, существенно различить между собою рядъ, расположенный по восходящимъ степенямъ перемѣнной или по какому бы то ни было другому правильному закону, и рядъ чисто численный, сумма котораго представляетъ число, а не функцію: частное значеніе перемѣнной

буквы можетъ привести первый ко второму, но обратная задача неопредѣленна. Напр., формулу

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \ldots,$$

данную безъ доказательства Ньютономъ, можно разсмотрѣть безразлично, какъ происходящую изъ ряда

$$x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \ldots,$$

въ которомъ полагается $x = 1$, или изъ ряда

$$\sqrt{2}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right),$$

гдѣ полагается $x = \frac{\pi}{4}$. Она принадлежитъ такимъ образомъ къ двумъ совершенно различнымъ теоріямъ и, кромѣ того, можетъ выводиться изъ множества другихъ.

Труды и Мемуары Эйлера содержатъ большое число суммированій этого рода, которыя мы вовсе не намѣрены приводить здѣсь всѣ; для ихъ изученія надлежитъ обратиться къ его Введенію въ анализъ безконечно-малыхъ и къ С.-Петербургскому сборнику Мемуаровъ.

Несмотря на все значеніе ряда Тэйлора часто проще получить члены разложенія, которые онъ долженъ былъ бы дать, при помощи другихъ методовъ примѣры которыхъ даны въ главѣ III второй Книги. Тамъ прежде всего помѣщено нѣсколько доказательствъ общей формулы Лагранжа, выражающей въ видѣ ряда, расположеннаго по степенямъ α, корень какого-угодно уравненія, представленнаго предварительно подъ видомъ

$$z = a + \alpha\varphi(z).$$

Эта прекрасная формула была предметомъ многочисленныхъ работъ, и выдающіеся геометры расходились во взглядахъ на отличительный признакъ представляемаго ею корня. Эти вопросы будутъ разобраны позже. Въ этой главѣ мы дадимъ относительно этого пункта лишь нѣсколько простѣйшихъ указаній. Формула Лагранжа даетъ, какъ слѣдствіе, двѣ другія достойныя вниманія формулы, принадлежащія Бурману и Абелю.

Методъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ очень часто является наивыгоднѣйшимъ для полученія членовъ разложенія, законность кото-

раго доказана; мы даемъ много примѣровъ на этотъ методъ, отмѣчая между ними замѣчательные ряды Чебышева. Теорія производящихъ функцій, созданная Лапласомъ, нѣсколько замѣчаній относительно символическихъ обозначеній и отступленіе въ сторону функцій, обозначаемыхъ черезъ X_n, и въ сторону чиселъ Бернулли заканчиваютъ главу, объединенную ничѣмъ другимъ, какъ только отсутствіемъ теоремы Тэйлора въ изученіи рядовъ, которые могли бы быть выведены изъ нея.

Глава IV содержитъ опредѣленіе мнимыхъ функцій. Главные пункты, разсмотрѣнные тамъ, были указаны выше, по поводу теоремы Тэйлора.

Глава V посвящена разложенію функцій отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ; она содержитъ распространеніе на этотъ случай формулъ Тэйлора и Лагранжа.

Глава VI знакомитъ съ разложеніемъ нѣкоторыхъ функцій въ безконечныя произведенія; основными формулами, изъ которыхъ выводится большинство другихъ, являются формулы, дающія выраженія $\sin x$ и $\cos x$ и прилагающіяся къ вещественнымъ или мнимымъ значеніямъ перемѣнной; онѣ принадлежатъ Эйлеру, который, не будучи строгимъ въ ихъ доказательствѣ и въ изученіи ихъ слѣдствій, вывелъ, однако, изъ нихъ весьма большое число вѣрныхъ и важныхъ результатовъ, подтвержденныхъ потомъ безукоризненнымъ анализомъ.

Разложенія подъ видомъ непрерывныхъ дробей разсматриваются въ главѣ VII, гдѣ указаны наиболѣе замѣчательныя формулы по этому предмету, полученныя Эйлеромъ, Ламбертомъ, Лагранжемъ и Гауссомъ, эти разложенія могутъ, притомъ, сильно разнообразиться для одной и той же функціи, и ихъ значеніе, столь большое въ Ариѳметикѣ, значительно меньше въ Анализѣ, такъ какъ условіе допущенія только цѣлыхъ знаменателей, влекущее за собою прекраснѣйшія свойства этихъ дробей, здѣсь опускается безъ замѣны его чѣмъ-либо другимъ.

Принципы теоріи вычетовъ, созданной Коши, изложены въ главѣ VIII. Знаменитый геометръ замѣтилъ, что во множествѣ задачъ, гдѣ играютъ роль функціи, проходящія черезъ безконечное значеніе, часть, важная для разсмотрѣнія, та, которая чаще всего опредѣляетъ одна результатъ, не есть, какъ указали бы, повидимому, всѣ аналогіи, *главная часть*, т.-е. простая функція, для смежныхъ значеній которой разность съ функціею есть безконечно-малая относительно каждаго изъ нихъ, но нѣкоторая дробь со знаменателемъ всегда первой степени, числитель которой Коши назвалъ *вычетомъ* и изящныя и

полезныя приложенія которой онъ далъ почти во всѣхъ частяхъ науки.

Наконецъ, вторая Книга заканчивается двумя главами, относящимися къ особеннымъ значеніямъ функцій и къ вопросамъ о maximum'ѣ и minimum'ѣ. Мы должны были помѣстить ихъ послѣ ученія о рядахъ, на которыхъ основана большая часть изложенныхъ тамъ методовъ и доказательствъ.

Приложеніе исчисленія безконечно-малыхъ къ теоріи кривыхъ и поверхностей составляетъ предметъ третьей Книги. Общность изложенныхъ тамъ результатовъ почти всегда абсолютна, и почти всѣ теоремы не зависятъ отъ спеціальнаго опредѣленія кривой или поверхности, къ которой онѣ относятся. Декартъ, Ферматъ, Паскаль, Гюйгенсъ Роберваль и нѣкоторые другіе безъ сомнѣнія рѣшили бы безъ помощи новаго исчисленія каждый изъ вопросовъ, къ которымъ оно прежде всего было приложено, но сила и красота новой идеи именно и состоятъ въ упраздненіи всякаго различія между изучаемыми функціями или между геометрическими мѣстами, которыя онѣ представляютъ. Соединяя въ одни и тѣ же изслѣдованія механическія и геометрическія кривыя, разсмотрѣнныя Декартомъ раздѣльно, Лейбницъ разрушилъ барьеръ, вредный для прогресса науки, возвѣщая первый о существованіи общихъ законовъ, приложимыхъ къ измѣненію всѣхъ непрерывныхъ величинъ; и если наиболѣе чудесные результаты, къ которымъ ведетъ этотъ путь, остались неизвѣстными создателямъ дифференціальнаго исчисленія, то нельзя имъ отказать въ неоспоримой чести проложенія первыхъ шаговъ въ этомъ направленіи.

Должно прибавить, что эта общность въ результатахъ, придавая значеніе дифференціальному исчисленію, составляетъ также и его простоту. Если индивидуальное изученіе кривыхъ и поверхностей, подобно изученію частныхъ функцій, и облегчается познаніемъ законовъ, общихъ для всѣхъ случаевъ, то оно всё-же требуетъ, надо это признать, вмѣстѣ съ неменьшею по силѣ изобрѣтательностью, пріемовъ изслѣдованія несравненно болѣе разнообразныхъ, и мы, удивляясь великимъ геніямъ, открывшимъ новые пути, не должны отъ этого цѣнить ниже труды тѣхъ, которые продолжали идти по старой дорогѣ, или умалять значеніе, связываемое съ ихъ открытіями.

Первая глава этой третьей Книги посвящена ученію о кривизнѣ плоскихъ линій и теоріи эволютъ, обѣ эти теоріи глубоко между собою связаны и раздѣлять ихъ не должно. Однако знаменитый Гюйгенсъ,

[illegible]зователь второй изъ этихъ теорій кажется не имѣлъ опредѣленнаго понятія о кривизнѣ; то кривиной мѣры онъ его не формулировалъ ясно. Лейбницъ и Ньютонъ первые пришли къ нему различными путями. Именно въ *Acta Eruditorum* 1686 г. Лейбницъ дал[illegible] опредѣленіе соприкасающагося круга, объясняя его важную роль, которую онъ долженъ играть при изученіи кривыхъ. Въ каждомъ безконечномъ маломъ трѣхкѣ кривой можно разсматривать говоритъ онъ какъ это дѣлали до сихъ поръ не только направленіе, но и измѣненіе этого направленія, т. е. сгибаніе (*flexus*); и какъ для того, чтобы узнать направленіе, пользуются возможно простѣйшею линіею какою является прямая такъ и я измѣряю сгибаніе кривой простѣйшею линіей, которая имѣла бы не только то же направленіе но еще и ту же кривизну какъ кривая т. е. кругомъ который не только касается ея, но и является для нея соприкасающимся. Указывать направленіе [illegible] свойственно прямой линіи, направленіе которой во всѣхъ точкахъ одно и то же точно такъ же указывать кривизну болѣе всего свойственно кругу, потому что кривизна круга одна и та же во всѣхъ его точкахъ. Соприкасающійся кругъ кривой въ точкѣ есть кругъ, образующій съ нею наименьшій уголъ соприкосновенія; въ самомъ дѣлѣ, среди безчисленнаго множества круговъ касающихся кривой въ точкѣ, всегда можно отмѣтить одинъ, который уподобляется ей болѣе, чѣмъ всѣ другіе и ползетъ такъ сказать, дольше около нея, такъ что никакой другой кругъ не можетъ быть помѣщенъ между ними".

Предыдущее мѣсто выписано изъ очень короткой Замѣтки Лейбница, край любопытной во всѣхъ отношеніяхъ. Въ ней мы видимъ примѣръ манеры этого мощнаго ума, когда онъ кажется всего какъ бы легко, но всегда проникаетъ до самой глубины. Онъ весьма ясно усматриваетъ теорію соприкосновенія и соприкосновенія различныхъ порядковъ, хотя и выражаетъ ее въ не совсѣмъ точной формѣ и здѣсь какъ во многихъ другихъ случаяхъ онъ довольствуется тѣмъ, что посѣялъ зерна новой теоріи предоставляя другимъ [illegible] ту заставить ихъ принести плоды. Указанія которыя онъ даетъ относительно способа нахожденія соприкасающагося круга не только весьма смутны но [illegible] условно невѣрны такъ какъ онъ ошибается относительно числа равныхъ корней, которые мы должны находить при разысканіи пересѣченія кривой съ ея соприкасающимся кругомъ. Изъ того не осмотра можно заключить что выбранный имъ примѣръ являющійся коническимъ сѣченіемъ разсмотрѣннымъ въ его вершинѣ есть единственный

который онъ изслѣдовалъ до конца; если бы онъ испыталъ другой, то онъ, конечно, усмотрѣлъ бы, что только три точки пересѣченія, но не четыре, сливаются въ одну. Многимъ изъ этихъ указаній, хотя и справедливымъ при надлежащемъ ихъ истолкованіи, не достаетъ, можетъ-быть, опредѣленнаго основанія, и понятно, что при чтеніи подобныхъ сочиненій заключающаяся въ нихъ доктрина осталась бы недоступною для большинства читателей.

Яковъ Бернулли, принимаясь нѣсколько лѣтъ спустя за изложеніе тѣхъ же принциповъ, отмѣтилъ недосмотръ Лейбница, относящійся къ числу точекъ пересѣченія кривой съ ея соприкасающимся кругомъ; но, несмотря на очевидность неоднократно представленныхъ ему объясненій, Лейбницъ остался при своемъ и только значительно позже отказался отъ своего перваго утвержденія.

Изъ того, что Лейбницъ не упоминаетъ имени Гюйгенса, повидимому, слѣдуетъ, что онъ не тотчасъ замѣтилъ внутреннюю связь между своею новой теоріей и теоріей эволютъ; но въ письмѣ, написанномъ пять лѣтъ спустя, онъ говоритъ Гюйгенсу: „Центры круговъ, измѣряющихъ кривизну, идутъ въ вашемъ построеніи посредствомъ развертыванія". Гюйгенсъ отвѣчалъ: „Вы мнѣ говорите о вашемъ разсужденіи: *De angulo contactus et osculi*, которое, помнится, я читалъ и которое не показалось мнѣ новымъ, такъ какъ я разсматривалъ эти виды соприкосновенія въ своемъ Трактатѣ о развертываніи кривыхъ и, притомъ, задолго передъ этимъ". „Я охотно вѣрю, отвѣчаетъ Лейбницъ, что вы представляли себѣ кругъ, описываемый изъ точки развернутой кривой и имѣющій радіусомъ наименьшую прямую, какую можно провести изъ этой точки до описанной кривой; но не думали ли вы, можетъ-быть, разсмотрѣть его, какъ мѣру кривизны, я же, когда разсматривалъ наибольшій кругъ, касающійся кривой внутренно, не помышлялъ о развертываніяхъ". Ньютонъ съ своей стороны, въ книгѣ: „*Принципы*", опубликованной въ 1687 г., постоянно пользуется теоріею радіуса кривизны и выказываетъ полное знакомство съ соотношеніемъ, связывающимъ эту теорію съ теоріей эволютъ.

Глава заканчивается ученіемъ о системахъ криволинейныхъ координатъ на плоскости и доказательствомъ замѣчательныхъ формулъ Ламэ (Lamé), создавъ эту теорію, онъ посвятилъ ей такой исчерпывающій трудъ, послѣ котораго, какъ кажется, очень мало осталось что-либо сдѣлать для дальнѣйшаго ея развитія или упрощенія. Мы особенно отмѣчаемъ замѣчательное соотношеніе, связывающее радіусы кривизны ортогональ-

ныхъ кривыхъ съ ихъ производными, взятыми по нормальнымъ дугамъ, очень изящную формулу, содержащую неявно законъ возможнаго измѣненія сторонъ безконечно-малыхъ прямоугольниковъ, на которые разбивается плоскость двумя рядами ортогональныхъ кривыхъ: каждый прямоугольникъ въ частности, очевидно, произволенъ; но ихъ послѣдовательныя стороны имѣютъ между собою необходимыя соотношенія, которыя измѣнились бы, если бы кривыя были расположены на другой поверхности, и являются общими только для двухъ взаимно навертываемыхъ поверхностей.

Ученіе о линіяхъ, нанесенныхъ на сферѣ, составляетъ предметъ второй главы; въ ней разсматривается элементъ, отмѣченный Эйлеромъ подъ именемъ *сферической кривизны* и введенный, какъ естественное обобщеніе понятія о кривизнѣ плоскихъ линій. Работы новѣйшихъ геометровъ распространили обобщеніе на линіи, нанесенныя на какой-угодно поверхности, и тѣмъ усилили значеніе весьма простыхъ теоремъ, которыя мы доказываемъ для случая сферическихъ кривыхъ. Распространеніе прекрасныхъ формулъ Ламэ на случай системы линій, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ на сферѣ должно быть особенно отмѣчено.

Третья глава посвящена линіямъ двоякой кривизны. Не занимаясь отдѣльно никакою кривою, мы даемъ, какъ для плоскихъ кривыхъ, свойства, общія имъ всѣмъ; они являются въ большинствѣ слѣдствіями изъ закона непрерывности, но связь, соединяющая ихъ съ этимъ закономъ, скрыта: только весьма изощренные и внимательные глаза могутъ ее замѣтить. Всякая кривая имѣетъ въ каждой точкѣ соприкасающуюся плоскость и соприкасающійся кругъ, ось котораго, представляющая пересѣченіе двухъ нормальныхъ безконечно-близкихъ плоскостей, есть производящая развертывающейся поверхности, имѣющей ребромъ возврата геометрическое мѣсто центровъ соприкасающихся сферъ.

Соприкасающаяся плоскость впервые была разсмотрѣна Иваномъ Бернулли, который, вводя ее въ рѣшеніе одной геометрической задачи, указалъ вполнѣ достаточный способъ для ея опредѣленія. Но эти разсужденія, кажется, очень мало обратили на себя вниманія до появленія прекраснаго Мемуара Монжа, въ которомъ въ первый разъ изложена общая теорія эволютъ и который составляетъ основаніе нашихъ познаній общаго характера о кривыхъ двоякой кривизны. Именно здѣсь впервые указана развертывающаяся поверхность, содержащая эволюты и свое ребро возврата, представляющее геометриче-

ское мѣсто центровъ соприкасающихся сферъ. Равнымъ образомъ онъ показалъ, что геометрическое мѣсто центровъ кривизны не есть эволюта, и облегчилъ рѣшеніе всѣхъ задачъ, изложенныхъ въ этой третьей главѣ.

Общая теорія поверхностей въ томъ видѣ, какъ она изложена въ въ главахъ V, VI и VII, заключается почти цѣликомъ въ Мемуарѣ Эйлера о кривизнѣ нормальныхъ сѣченій и въ тѣхъ сочиненіяхъ Монжа, гдѣ онъ показываетъ существованіе и свойства линій кривизны. Эти свойства, столь простыя и столь удивительныя по своей общности, не могли не стать вскорѣ школьными и, такъ сказать, элементарными. Ничего нѣтъ полезнѣе для ясности теоріи, какъ ея введеніе въ строй правильнаго преподаванія. Послѣдовательныя усилія учителей, а часто также и учениковъ, направленныя на всѣ ея слѣдствія, углубляясь въ случайныя трудности безъ пропуска какого-либо пункта неизслѣдованнымъ, приводятъ мало-по-малу къ очевиднѣйшимъ терминамъ предложенія, которыя, высказанныя впервые ихъ творцами, могли показаться чрезвычайно чудесными и въ высшей степени неожиданными. Во главѣ работъ, наиболѣе способствовавшихъ достиженію этой цѣли, должно поставить остроумную теорію индикатрисы, при помощи которой Дюпенъ (Dupin) такъ счастливо связалъ между собою результаты Эйлера и Монжа. Приведемъ также, среди крупныхъ успѣховъ, какіе оставалось совершить послѣ трудовъ этихъ двухъ великихъ геніевъ, важную теорему объ ортогональныхъ поверхностяхъ, открытую тоже Дюпеномъ, которой изслѣдованія Ламэ придали потомъ такъ много значенія. Не забудемъ, наконецъ, прекрасной теоремы Малюса (Malus) о свѣтовыхъ лучахъ, дополненной Дюпеномъ и доказанной имъ въ первый разъ во всей ея общности.

Первыя разысканія Монжа по теоріи поверхностей появляются въ Мемуарѣ, заглавіе котораго обѣщаетъ, повидимому, изслѣдованія совершенно иного характера. Въ самомъ дѣлѣ, въ своемъ Мемуарѣ о выемкахъ и насыпяхъ онъ даетъ въ первый разъ условіе, чтобы прямыя были нормальны къ одной и той же поверхности, и тамъ же доказываетъ, для какой-угодно поверхности, существованіе линій кривизны. Особенность этого Мемуара должна быть отмѣчена: онъ по своему заглавію кажется вполнѣ чуждымъ теоріи поверхностей; дѣйствительно, онъ озаглавленъ: *Мемуаръ по теоріи выемокъ и насыпей*. Изслѣдуемый тамъ вопросъ любопытенъ, но онъ рѣшенъ, надо признаться, посредствомъ такихъ нестрогихъ разсужденій, что можно даже усомниться въ самой

справедливости заключеній. Такимъ образомъ Монжъ одно изъ своихъ самыхъ прекрасныхъ открытій далъ въ видѣ леммы, предназначенной облегчить изученіе этой неполной и лишенной значенія теоріи.

Послѣдняя глава этого тома изслѣдуетъ линіи, нанесенныя на какой-угодно поверхности; главные въ ней результаты заимствованы изъ одного изъ наиболѣе прекрасныхъ и наиболѣе знаменитыхъ Мемуаровъ Гаусса. Они относятся къ деформаціи (видоизмѣненію) поверхностей по такому закону, что длина нанесенныхъ на нихъ линій остается безъ измѣненія. При такой деформаціи произведеніе радіусовъ кривизны остается неизмѣннымъ въ каждой точкѣ; но обратное предложеніе несправедливо, и точки одной поверхности могутъ соотвѣтствовать по одной точкамъ другой поверхности такъ, что произведеніе радіусовъ кривизны будетъ одно и то же въ соотвѣтственныхъ точкахъ, но соотвѣтственныя линіи не будутъ еще вслѣдствіе этого одной и той же длины; необходимы другія условія, чтобы двѣ поверхности были навертываемы одна на другую; ихъ изученіе, постепенно усовершенствованное многими искусными геометрами, привело къ весьма простому методу, позволяющему рѣшать, не выходя изъ предѣловъ дифференціальнаго исчисленія, навертываемы ли двѣ поверхности одна на другую.

Та же глава содержитъ, наконецъ, нѣсколько замѣчательныхъ результатовъ относительно элемента, названнаго Ліувиллемъ (Liouville) *геодезическою кривизною* и играющаго въ ученіи о линіяхъ, нанесенныхъ на поверхности, роль, совершенно аналогичную роли кривизны въ ученіи о плоскихъ линіяхъ.

Таково краткое содержаніе двадцати шести главъ, составляющихъ этотъ первый томъ; въ немъ есть важные пробѣлы и многочисленные недостатки, которыхъ я не скрываю отъ себя. Сравнивая то, что я смогъ сдѣлать, съ предначертаннымъ себѣ планомъ, я знаю лучше всякаго другого, какъ далеко не достигъ я желаемой цѣли. Я хотѣлъ бы устранить для молодыхъ геометровъ при изученіи ими трудовъ вождей науки всѣ препятствія, проистекающія отъ незнанія принциповъ, на которыхъ эти труды покоятся; но такая программа почти безпредѣльна, и я долженъ былъ ограничиться, по мѣрѣ своихъ силъ и знаній, облегченіемъ для нихъ лишь первыхъ шаговъ. Можно, безъ сомнѣнія, все это сдѣлать гораздо лучше, но нельзя, я въ томъ убѣжденъ, преодолѣть всѣхъ трудностей. Можетъ-быть, даже было-бы несправедливо сожалѣть объ этомъ; ничто не можетъ замѣнить непо-

средственнаго изученія великихъ учителей, и помогая молодымъ людямъ слишкомъ долго держаться отъ нихъ вдали и тѣмъ облегчая ихъ занятія, мы, пожалуй, задержали бы, и на очень, можетъ-быть, долгое время, развитіе у нихъ духа творчества.

Ж. Бертранъ